

P4-2013-79

В. В. Пупышев \*

ДЛИНА И ЭФФЕКТИВНЫЙ РАДИУС  
ДВУМЕРНОГО РАССЕЯНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ  
ЦЕНТРАЛЬНЫМ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ  
ПОТЕНЦИАЛОМ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

\* E-mail: [pupyshev@theor.jinr.ru](mailto:pupyshev@theor.jinr.ru)

Пупышев В. В.

P4-2013-79

Длина и эффективный радиус двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом

Дан вывод и качественный анализ нелинейных и линейных уравнений, предназначенных для вычисления длины рассеяния и эффективного радиуса. Найдены и исследованы точные решения этих уравнений в случае центрального потенциала прямоугольной формы. Выявлена связь между эффективным радиусом и длиной рассеяния. Особое внимание уделено случаям нулевой и неограниченной длин рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2013

Pupyshev V. V.

P4-2013-79

Length and Effective Range of Two-Dimensional Scattering of a Quantum Particle by a Central Short-Range Potential

The derivation and qualitative analysis of the nonlinear and linear equations adopted for calculation of the scattering length and effective range are given. In the case of the central square-well potential, the exact solutions of these equations are found and studied. The connection between the effective range and scattering length is revealed. Special attention is paid to the cases of zero and unrestricted scattering lengths.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2013

## ВВЕДЕНИЕ

Понятия длины рассеяния и эффективного радиуса широко применяются в теории трехмерного потенциального рассеяния [1–5]. В ядерную физику низких энергий [6] эти понятия ввел Бете [7].

В настоящее время развитие теории двумерного потенциального рассеяния стимулируется выдающимися успехами экспериментальной физики ультрахолодных газов в магнитооптических ловушках различных конфигураций [8–11]. Одна из них — дискообразная. Экспериментально достижимая температура газа настолько мала, что в такой ловушке длина де Бройля [1] частицы газа сравнима с поперечным размером диска-ловушки. Поэтому квантовое движение частиц газа в основном происходит в плоскости, проходящей через края диска. Меняя внешнее электромагнитное поле, создающее такую ловушку, удается удерживать в ней заданное четное число атомов и управлять парными взаимодействиями между ними. Минимальное число запертых в диске-ловушке и движущихся в плоскости атомов равно двум [11]. В системе центра масс таких ультрахолодных атомов квантово-механическая задача об их относительном движении сводится к задаче о медленном движении одной квантовой частицы в двумерной плоскости. Длина рассеяния и эффективный радиус являются универсальными (не зависящими от формы потенциала) характеристиками такого движения. Поэтому их исследование представляется актуальной задачей современной теории двумерного рассеяния.

Длина и эффективный радиус двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом исследовались многими авторами [5, 12–21]. Тем не менее квантово-механический анализ этих фундаментальных характеристик низкоэнергетического рассеяния далек от завершения. В частности, не выведены уравнения для функций, обладающих прозрачным физическим смыслом и определяющих значения длины рассеяния и эффективного радиуса; открытыми остаются вопросы о связи эффективного радиуса с длиной рассеяния и о переопределении этих параметров в случаях их нулевых или бесконечно больших по модулю значений; ни для какого потенциала не известны представления длины рассеяния и эффективного радиуса через элементарные или известные специальные функции.

Главная цель настоящей работы — восполнить эти недостатки современной теории двумерного рассеяния. В разд. 1 собраны основные определения.

В разд. 2 дан вывод и качественный анализ уравнений для вспомогательных функций, значения которых в пределе их бесконечно большого аргумента являются длиной рассеяния и эффективным радиусом. В разд. 3 найдены и исследованы точные решения полученных уравнений в случае потенциала прямоугольной формы. В разд. 4 исследованы случаи нулевой и неограниченно большой по модулю значений длины рассеяния и в этих случаях предложены новые определения длины рассеяния и эффективного радиуса. Основные результаты, полученные в разд. 2–4, перечислены в заключении.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Начнем с физических предположений. Полагаем, что квантовая частица  $p_1$  имеет массу  $m_1$  и движется лишь в двумерной плоскости  $\mathcal{P}$  ее координатного пространства  $\mathcal{R}^3$ . Считаем, что некоторая неподвижная точка  $O$  этой плоскости является силовым центром, воздействующим на частицу  $p_1$  посредством потенциала  $V$ , который зависит только от безразмерного расстояния  $x$  между точкой  $O$  и этой частицей и подчинен следующим условиям:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 |V(x)| = 0, \quad V(x) \in C^0(0, \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n |V(x)| = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Такой потенциал принято называть центральным, слабосингулярным в нуле, непрерывным на всей полуоси  $x > 0$  и короткодействующим [5]. Отметим, что условие непрерывности можно ослабить: в области  $0 < x < \infty$  потенциал  $V(x)$  может быть кусочно-непрерывной функцией с конечным числом точек разрыва первого рода. Пример такой функции — потенциал прямоугольной формы:  $V(x) = V_0 \theta(x-b)$ , где  $V_0$  и  $b$  — ненулевая и положительная константы ( $V_0 \neq 0$ ,  $b > 0$ ), а  $\theta(x-b)$  — функция Хевисайда, равная единице при  $x \leq b$  и нулю в противном случае.

Теперь перечислим известные в теории двумерного рассеяния [5, 21–23] следствия высказанных выше предположений о потенциале. В поле центрального потенциала  $V(x)$  полный набор квантовых чисел частицы  $p_1$  состоит из ее безразмерного волнового числа  $q$  и дискретного числа  $\lambda$ , принимающего любые полуцелые значения, начиная с  $-1/2$ . При условиях (1) радиальная волновая функция  $u_\lambda(x; q) = \langle x | q, \lambda \rangle$  состояния рассеяния  $|q, \lambda\rangle$ ,  $q > 0$ , определяется как регулярное (ограниченное на всей полуоси  $x > 0$ ) решение одномерного уравнения Шредингера

$$[\partial_x^2 + q^2 - \lambda(\lambda + 1)x^{-2} - V(x)] u_\lambda(x; q) = 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

с начальным условием

$$u_\lambda(x; q) \sim (qx)^{\lambda+1}, \quad qx \rightarrow 0, \quad (3)$$

и асимптотикой

$$u_\lambda(x; q) \rightarrow \sin [qx - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda(q)], \quad qx/|\lambda| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Величины  $\delta_\lambda(q)$  и  $\sigma_\lambda(q)$  называются парциальными фазой и сечением упругого рассеяния в состоянии  $|q, \lambda\rangle$ . Сечение  $\sigma_\lambda(q)$  вычисляется по формулам [5, 21]

$$\sigma_\lambda(q) \equiv \frac{\sigma_\lambda^u(q)}{[\text{ctg } \delta_\lambda(q)]^2 + 1}, \quad \sigma_\lambda^u(q) \equiv \frac{4}{q}(2 - \delta_{2\lambda, -1}). \quad (5)$$

Здесь и далее  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера. При любом  $q > 0$  сечение  $\sigma_\lambda(q)$  не превышает своего унитарного предела  $\sigma_\lambda^u(q)$ . Предел  $q \rightarrow 0+$  называется пределом низких энергий.

Перечислим все известные к настоящему времени определения длины рассеяния и эффективного радиуса для двумерного рассеяния квантовой частицы короткодействующим потенциалом.

В работах [12, 13] использовались понятия дифференциальной и полной длин рассеяния. Дифференциальной длиной рассеяния назывался квадрат модуля амплитуды двумерного рассеяния, а полной — интеграл от такого квадрата по углу рассеяния на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

В работах [14–16] для случая  $2\lambda = -1$  длина рассеяния  $a'$  и эффективный радиус  $r'_{\text{eff}}$  определялись как константы асимптотики

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q) \sim (2/\pi) [\ln(a'q/2) + \gamma] + (q^2/2) r'_{\text{eff}}, \quad q \rightarrow 0.$$

Стоит отметить, что длина рассеяния  $a'$  всегда положительная, а в случае  $2\lambda = -1$  авторам работы [16] удалось получить ограничения на потенциал  $V$ , при которых длина рассеяния  $a'$  и эффективный радиус  $r'_{\text{eff}}$  являются конечными константами.

В том же случае  $2\lambda = -1$  авторы работ [17, 18] считали длиной рассеяния  $a''$  и эффективным радиусом  $r''_{\text{eff}}$  коэффициенты разложения

$$\text{ctg } \delta_\lambda(q) - (2/\pi) [\ln(q/2) + \gamma] = (2/\pi) [-1/a'' + (q^2/2) r''_{\text{eff}}] + \dots$$

по четным степеням аргумента  $q$  и доказали, что для короткодействующего потенциала такое разложение сходится равномерно на всей полуоси  $q > 0$ . Аналогичное определение длины рассеяния  $a''$  и эффективного радиуса  $r''_{\text{eff}}$  использовалось в работе [19], посвященной исследованию амплитуд низкоэнергетического рассеяния в задаче трех частиц на плоскости.

Во всех уже процитированных работах [14–19] основное внимание уделялось случаю  $2\lambda = -1$ . В работе [20] для любого  $\lambda$  предложено использовать функцию эффективного радиуса

$$K'(q) \equiv q^{2\lambda+1} [\text{ctg } \delta_\lambda(q) - h'(q)] = -1/a''' + (q^2/2) r'''_{\text{eff}} + \dots, \\ h'(q) \equiv (2/\pi) \ln(q/2),$$

а константы  $a'''$  и  $r_{\text{eff}}'''$  считать длиной рассеяния и эффективным радиусом. Определение функции  $h'(q)$  предложено ранее в работе [19].

Завершим настоящий раздел определениями, введенными в работе [21], и доказанными в этой же работе утверждениями.

Для каждого состояния рассеяния  $|\lambda, q\rangle$ ,  $q > 0$ , с выбранным значением  $\lambda$  функция эффективного радиуса  $K(q)$  определяется через функцию  $K(x; q)$  формулами

$$K(q) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} K(x; q), \quad K(x; q) \equiv q^{2\lambda+1} [\text{ctg } \delta_\lambda(x; q) - h(q)]. \quad (6)$$

Функция  $K(x; q)$  является рядом по четным степеням волнового числа

$$K(x; q) = \tau \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} K_n(x) = -\frac{1}{a(x)} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}}(x) - q^4 r_{\text{eff}}^3(x) P(x) + \dots, \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Здесь и всюду далее  $\tau$  — зависящий от значения  $\lambda$  множитель:

$$\tau \equiv \frac{2}{\pi} (2\lambda - 1 + 2\delta_{2\lambda, -1})!! (2\lambda + 1 + \delta_{2\lambda, -1})!! = \frac{(2^m m!)^2}{\pi m},$$

$m \equiv \lambda + 1/2$  — целое число;  $\delta_\lambda(x; q)$  — фазовая функция [5],  $h(q)$  — логарифмическая функция, содержащая константу Эйлера [24]  $\gamma$  и определенная формулами

$$h(q) \equiv (2/\pi) [\ln(q/2) + \gamma] = (2/\pi) \ln(q/q_0), \quad q_0 \equiv 2 \exp(-\gamma) = 1,122918 \dots$$

В начальной точке  $x = 0$  полюсы  $x \geq 0$  функции  $a(x)$  и  $\xi(x) \equiv a^2(x)r_{\text{eff}}(x)$  равны нулю, а в бесконечно удаленной точке  $x = \infty$  могут быть неограниченными. Если предельные при  $x \rightarrow \infty$  значения  $a$  и  $r_{\text{eff}}$  функций  $a(x)$  и  $r_{\text{eff}}(x)$  удовлетворяют ограничениям  $a \neq 0$  и  $|a|, |r_{\text{eff}}| < \infty$ , то вследствие представлений (6) и (7) функция  $K(q)$  имеет низкоэнергетическую ( $q \rightarrow 0+$ ) асимптотику

$$K(q) \equiv q^{2\lambda+1} [\text{ctg } \delta_\lambda(q) - h(q)] = -\frac{1}{a} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}} - q^4 r_{\text{eff}}^3 P + O(q^6), \quad (8)$$

а коэффициенты  $a$ ,  $r_{\text{eff}}$  и  $P \equiv P(\infty)$  называются длиной рассеяния, эффективным радиусом и параметром формы. Именно такое определение, исключаяющее особые случаи  $a = 0$ ,  $|a| = \infty$  или  $|r_{\text{eff}}| = \infty$ , используется в разд. 2 и 3 настоящей работы. Анализу особых случаев ( $a = 0$ ,  $a = \pm\infty$ ) посвящен разд. 4.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛИНЫ РАССЕЯНИЯ И ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА

В настоящем разделе ключевыми окажутся разложение (7) и полученные в работе [21] специальные представления регулярного и нерегулярного решений  $j_\lambda(qx)$  и  $\tilde{n}_\lambda(qx)$  уравнения Шредингера (2) в случае тождественно равного нулю потенциала  $V(x)$ . Эти решения выражаются через функции Бесселя  $J_m(qx)$  и  $Y_m(qx)$  целого порядка [24] и являются рядами, содержащими известные коэффициенты  $a_n$  и функции  $d_n(x)$ : функция  $j_\lambda(qx)$  — ряд

$$j_\lambda(qx) = (\pi qx/2)^{1/2} J_m(qx) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(qx)^{\lambda+1}}{(2\lambda+1+\delta_{2\lambda,-1})!!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (qx)^{2n}, \quad (9)$$

а функция  $\tilde{n}_\lambda(qx)$  такова, что

$$\tilde{n}_\lambda(qx) = (\pi qx/2)^{1/2} Y_m(qx) = n_\lambda(qx) + h(q) j_\lambda(qx), \quad (10)$$

где  $n_\lambda(qx)$  — ряд

$$n_\lambda(qx) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(2\lambda-1+2\delta_{2\lambda,-1})!!}{(qx)^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x) (qx)^{2n}. \quad (11)$$

Последовательно выведем нелинейные уравнения для функций  $K(x; q)$ ,  $a(x)$  и линейное уравнение для функции  $r_{\text{eff}}(x)$ . Применим нелинейную версию метода фазовых функций [5], в которой тангенс  $T(x; q) = \text{tg } \delta_\lambda(x; q)$  фазовой функции  $\delta_\lambda(x; q)$  определяется как решение уравнения

$$\partial_x T(x; q) = -(\pi/2) x V(x) [J_m(qx) - T(x; q) Y_m(qx)]^2, \quad x > 0,$$

с граничным условием  $T(x; q) = 0$  при  $x = 0$ . Используя соотношения (6) и (9), (10), выразим в этом уравнении функции  $J_m$  и  $Y_m$  через известные функции  $j_\lambda$  и  $n_\lambda$ , а искомую функцию  $T(x; q)$  — через функцию  $K(x; q)$ . В итоге получим уравнение

$$\partial_x K(x; q) = V(x) [q^{-\lambda-1} j_\lambda(\rho) K(x; q) - q^\lambda n_\lambda(\rho)]^2, \quad x > 0. \quad (12)$$

В этом нелинейном уравнении представим функции  $j_\lambda$  и  $n_\lambda$  рядами (9) и (11), а искомое решение  $K(x, q)$  заменим его разложением (7). В получившемся уравнении приравняем нулю сумму всех слагаемых, не зависящих от  $q$ , сумму всех слагаемых, пропорциональных  $q^2$ , и сумму всех слагаемых, пропорциональных  $q^4$ . Первое равенство будет нелинейным и однородным уравнением для функции  $a(x)$ , а второе — линейным, но неоднородным уравнением для функции  $r_{\text{eff}}(x)$ , а третье равенство окажется уравнением для функции  $P(x)$ .

Приведем уравнения для функций  $a(x)$  и  $r_{\text{eff}}(x)$ . Для краткости записи используем обозначение  $y(x) \equiv \ln(x)$  и не указываем аргумент  $x$  функций  $y(x)$ ,  $V(x)$ ,  $a(x)$  и  $r_{\text{eff}}(x)$ .

В случае  $2\lambda = -1$  функция  $a(x)$  подчиняется уравнению

$$\tau \partial_x a = xV[1 + \tau ay]^2, \quad (13)$$

а в случае  $2\lambda \geq 1$  — уравнению

$$\tau \partial_x a = \frac{x^{2\lambda}}{2\lambda + 1} V [x - x^{-2\lambda} \tau a]^2. \quad (14)$$

В случае  $2\lambda = -1$  функция  $r_{\text{eff}}(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\tau \partial_x r_{\text{eff}} = -a^{-2} xV(1 + \tau ay) [2ar_{\text{eff}} + x^2(1 + \tau ay - \tau a)], \quad (15)$$

в случае  $2\lambda = 1$  — уравнению

$$\tau \partial_x r_{\text{eff}} = a^{-2} xV(\tau a - x^2) [a(r_{\text{eff}} - \tau y) + x^2/4], \quad (16)$$

а в оставшемся случае  $2\lambda \geq 3$  — уравнению

$$\tau \partial_x r_{\text{eff}} = \frac{2}{2\lambda + 1} a^{-2} xV(\tau a - x^{2\lambda+1}) \left[ a \left( r_{\text{eff}} + \tau \frac{x^{-2\lambda+1}}{2\lambda - 1} \right) + \frac{x^2}{2\lambda + 3} \right]. \quad (17)$$

Обсудим уравнения (13) и (14). В этих уравнениях знаки производной  $\partial_x a$  и потенциала  $V$  совпадают, эта производная равна нулю в тех же точках, что и потенциал. Следовательно, непрерывное решение  $a(x)$  монотонно возрастает или убывает на отрезке  $[x_1, x_2]$ , если на этом отрезке потенциал является отталкивающим ( $V > 0$ ) или притягивающим ( $V < 0$ ), и имеет локальный экстремум в некоторой точке  $x = \tilde{x} < \infty$ , если в этой точке потенциал меняет знак. Обсуждаемые уравнения (13) могут иметь решения, терпящие разрыв второго рода. В этом случае в малой окрестности точки разрыва следует перейти к уравнениям для функции  $\tilde{a}(x) = a^{-1}(x)$ .

Теперь обсудим уравнения (15)–(17). Их правые части содержат множитель  $a^{-2}(x)$ , и поэтому решение  $r_{\text{eff}}(x)$  может иметь полюс первого или же второго порядка в некоторой точке  $x = \tilde{x}$ , если в этой точке функция  $a(x)$  меняет знак. При наличии полюса следует положить  $r_{\text{eff}}(x) = \tau \xi(x)/a^2(x)$  и вместо исходных уравнений использовать порожденные ими уравнения для ограниченной в точке  $x = \tilde{x}$  функции  $\xi(x)$ : в случае  $2\lambda = -1$  — уравнение

$$\partial_x \xi = \frac{x}{2} V(1 + \tau ay) [4y\xi - x^2(1 + \tau ay - \tau a)], \quad (18)$$

при  $2\lambda = 1$  — уравнение

$$\partial_x \xi = \frac{1}{8x} V(\tau a - x^2) [8\xi + x^2(x^2 - 4\tau ay)], \quad (19)$$



а в случае  $2\lambda \geq 3$  — уравнение

$$\partial_x \xi = \frac{1}{2\lambda + 1} V(\tau a - x^{2\lambda+1}) x^{-2\lambda} \left[ 2\xi + \frac{\tau a x^2}{2\lambda - 1} + \frac{x^{2\lambda+3}}{2\lambda + 3} \right]. \quad (20)$$

Заметим, что равенства  $a(0) = 0$  и  $\xi(0) = 0$ , упомянутые в предыдущем разделе, являются граничными условиями для уравнений (13), (14) и (18)–(20) в начальной точке  $x = 0$ , а каждое из трех уравнений (18)–(20) представимо в виде

$$\partial_x \xi(x) = v_2(x) \xi(x) + v_1(x)$$

и поэтому при условии  $\xi(0) = 0$  имеет единственное решение

$$\xi(x) = \int_0^x dx_1 v_1(x_1) \exp \left\{ \int_{x_1}^x dx_2 v_2(x_2) \right\}, \quad (21)$$

которое является интегральным представлением функции  $\xi(x)$  через функцию  $a(x)$ .

Наша следующая задача — свести все полученные уравнения (13)–(17) к системам линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Используем для этого известный в теории дифференциальных уравнений [25] метод вариации произвольных коэффициентов. Напомним, что в этом методе искомое решение исходного уравнения сначала представляется через две неизвестные функции, производные которых по определению подчиняются некоторому тождеству, а затем это тождество используется при выводе системы двух уравнений.

Начнем с линеаризации уравнения (13). Его решение будем искать в виде

$$a(x) = -\frac{s_0(x)}{\tau c_0(x)}. \quad (22)$$

Произвольные коэффициенты  $c_0(x)$  и  $s_0(x)$  подчиним тождеству

$$\partial_x c_0(x) \equiv \ln(x) \partial_x s_0(x), \quad x > 0, \quad 2\lambda = -1. \quad (23)$$

Подстановкой (22) сведем исходное уравнение (13) к соотношению, содержащему обе производные  $\partial_x c_0$  и  $\partial_x s_0$ . Используя тождество (23), исключим из этого соотношения производную  $\partial_x s_0$  или же производную  $\partial_x c_0$ . В первом случае выведем одно, а во втором — другое уравнение для искомых функций  $c_0(x)$  и  $s_0(x)$ . Запишем полученную таким образом однородную систему двух уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_x c_0(x) &= -V(x) [c_0(x) - s_0(x) \ln x] x \ln x, \\ \partial_x s_0(x) &= -V(x) [c_0(x) - s_0(x) \ln x] x, \quad 2\lambda = -1. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь изложенным выше способом линеаризуем уравнение (14). Для этого используем ту же подстановку (22), но искомые функции  $c_0$  и  $s_0(x)$  подчиним тождеству

$$\partial_x c_0(x) \equiv -x^{-2\lambda-1} \partial_x s_0(x), \quad x > 0, \quad 2\lambda \geq 1, \quad (25)$$

В результате получим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x c_0(x) &= \frac{V(x)}{2\lambda+1} [xc_0(x) + x^{-2\lambda} s_0(x)], \\ \partial_x s_0(x) &= -\frac{V(x)}{2\lambda+1} [xc_0(x) + x^{-2\lambda} s_0(x)] x^{2\lambda+1}, \quad 2\lambda \geq 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Для редукции уравнений (15)–(17) к системам неоднородных уравнений применим одну и ту же подстановку

$$r_{\text{eff}}(x) = \frac{2\tau}{s_0(x)} \left[ c_1(x) - s_1(x) \frac{c_0(x)}{s_0(x)} \right], \quad 2\lambda \geq -1, \quad (27)$$

но используем соответствующие выбранному значению  $\lambda$  уравнения (24) или (26) и различные тождества. Приведем эти тождества и итоговые системы уравнений, полагая для краткости записи  $y(x) \equiv \ln(x)$  и не указывая аргумент  $x$  функций  $y(x)$ ,  $V(x)$ ,  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$ ,  $n = 0, 1$ .

Итак, уравнение (15) благодаря тождеству

$$4 [\partial_x c_1 - y \partial_x s_1] \equiv x^2 \partial_x s_0, \quad x > 0, \quad 2\lambda = -1, \quad (28)$$

сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x c_1 &= \frac{V}{4} \{4y(c_1 - y s_1) + x^2 [(2y-1)c_0 + 2(1-y)y s_0]\} x, \\ \partial_x s_1 &= \frac{V}{4} \{4(y s_1 - c_1) + x^2 [2c_0 + (1-2y)s_0]\} x, \quad 2\lambda = -1. \end{aligned} \quad (29)$$

Тождество

$$8 [\partial_x c_1 + x^{-2} \partial_x s_1] \equiv x^2 \partial_x c_0 + 4y \partial_x s_0, \quad x > 0, \quad 2\lambda = 1, \quad (30)$$

позволяет вывести из уравнения (16) систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x c_1 &= \frac{V}{16} \left[ 8 \left( xc_1 + \frac{1}{x} s_1 \right) - x^3 (4y+1) c_0 - 8xy s_0 \right], \\ \partial_x s_1 &= -\frac{V}{16} \left[ 8 \left( xc_1 + \frac{1}{x} s_1 \right) - 2x^3 c_0 - x(4y+1) s_0 \right] x^2, \quad 2\lambda = 1. \end{aligned} \quad (31)$$

При выборе тождества

$$2 [\partial_x c_1 + x^{-2\lambda-1} \partial_x s_1] \equiv \frac{x^2}{2\lambda+3} \partial_x c_0 - \frac{x^{-2\lambda+1}}{2\lambda-1} \partial_x s_0, \quad x > 0, \quad 2\lambda \geq 3, \quad (32)$$

уравнение (17) порождает следующую систему:

$$\begin{aligned} \partial_x c_1 &= \frac{V}{2\lambda+1} \left[ xc_1 + x^{-2\lambda} s_1 + \frac{x^2}{2\lambda-1} \left( \frac{2}{2\lambda+3} xc_0 + x^{-2\lambda} s_0 \right) \right], \\ \partial_x s_1 &= -\frac{V}{2\lambda+1} \left[ xc_1 + x^{-2\lambda} s_1 - \frac{x^2}{2\lambda+3} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( xc_0 - \frac{2}{2\lambda-1} x^{-2\lambda} s_0 \right) \right] x^{2\lambda+1}, \quad 2\lambda \geq 3. \end{aligned} \quad (33)$$

Завершим настоящий раздел важными замечаниями.

Функции  $K(x; q)$ ,  $a(x)$  и  $r_{\text{эф}}(x)$  имеют прозрачный физический смысл: их значения в любой точке  $x = b \geq 0$  станут соответственно функцией эффективного радиуса, длиной рассеяния и эффективным радиусом, если потенциал  $V(x)$  заменить потенциалом  $V(x)\theta(b-x)$ , т.е. «обрезать» в этой точке. Правые части уравнений (15)–(17) для функции  $r_{\text{эф}}(x)$  содержат функцию  $a(x)$ , а связь  $r_{\text{эф}}(x) = \tau\xi(x)/a^2(x)$  и соотношение (21) порождают интегральное представление функции  $r_{\text{эф}}(x)$  через функцию  $a(x)$ . Следовательно, эффективный радиус  $r_{\text{эф}}$  зависит и от потенциала  $V(x)$ , и от длины рассеяния  $a$ . Анализ функции  $P(x)$  выходит за рамки настоящей работы, поэтому уравнение, определяющее эту функцию, лишь упоминалось выше.

В отличие от функций  $a(x)$  и  $r_{\text{эф}}(x)$  компоненты  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$ ,  $n = 0, 1$ , не имеют какого-либо физического смысла. Системы уравнений (24), (26) и (29), (31), (33) принадлежат бесконечной по индексу  $n = 0, 1, \dots$  рекуррентной цепочке уравнений, полученной в работе [21] способом, отличным от изложенного выше. В той же работе доказаны следующие утверждения. Условие (3) порождает граничные условия  $c_n(x) = \delta_{n,0}$ ,  $s_n(x) = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , в начальной точке  $x = 0$ . При таких условиях и ограничениях (1) на потенциал  $V(x)$  обсуждаемая цепочка имеет единственное решение, все его компоненты  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , непрерывны на полуоси  $x > 0$  и ограничены в бесконечно удаленной точке  $x = \infty$ . Вследствие этих фактов и связей (22) и (27) при тех же ограничениях (1) уравнения (13)–(20) однозначно разрешимы.

### 3. ДЛИНА РАССЕЯНИЯ И ЭФФЕКТИВНЫЙ РАДИУС В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Приведем полезный с методической точки зрения пример, позволяющий проиллюстрировать все возможные особенности функций  $a(x)$  и  $r_{\text{эф}}(x)$ . Для

этого исследуем случай финитного потенциала прямоугольной формы. Положим  $V(x) = V_0\theta(b-x)$ , где  $V_0 \neq 0$  и  $b > 0$  — некоторые константы. Наша задача — найти и исследовать точные решения уравнений (13)–(17) на всей полуоси  $x > 0$ . Так как в области  $x > b$  потенциал  $V(x)$  тождественно равен нулю, то в этой области искомые решения  $a(x)$  и  $r_{\text{eff}}(x)$  тождественно равны их значениям  $a(b)$  и  $r_{\text{eff}}(b)$  в точке  $x = b$ . Следовательно, эти значения являются длиной рассеяния  $a$  и эффективным радиусом  $r_{\text{eff}}$  и для вычисления этих констант достаточно решить уравнения (13)–(17) на конечном отрезке  $0 \leq x \leq b$ . Приступим к решению.

Сначала рассмотрим случай  $V_0 < 0$ , когда потенциал  $V(x)$  является прямоугольной ямой, глубина и ширина которой равны соответственно  $-V_0$  и  $b$ . Положив  $\alpha \equiv \sqrt{-V_0}$ ,  $z \equiv \alpha x$  и выполнив соответствующую подстановку

$$a(x) = -\frac{1}{\tau} x^{2m} \frac{z \partial_z A(z) + mA(z)}{z \partial_z A(z) [\delta_{m,0} \ln(x) + \theta(m-1)] - (\delta_{m,0} + m) A(z)},$$

сведем уравнения (13) и (14) к уравнению Бесселя [24] для соответствующей функции  $A(z)$ . Разрешив такие уравнения, выведем представление функции  $a(x)$  через функции Бесселя  $J_m(z)$ . Используя это представление, найдем интеграл (21), а затем и соответствующую ему функцию  $r_{\text{eff}}(x)$ . В итоге получим следующие формулы: в случае  $2\lambda = -1$ ,  $x \leq b$ ,

$$a(x) = -\frac{\pi}{2} \frac{z J_1(z)}{J_0(z) + z J_1(z) \ln(x)}, \quad r_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{\pi \alpha^2} \left[ z^2 - 2 + 2z \frac{J_0(z)}{J_1(z)} \right]; \quad (34)$$

в случае  $2\lambda = 1$ ,  $x \leq b$ ,

$$a(x) = -\frac{\pi}{4} x^2 \frac{J_2(z)}{J_0(z)}, \quad (35)$$

$$r_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ 4 \ln(x) + [8J_2(z) - z^2 J_0(z)] \frac{J_0(z)}{[zJ_2(z)]^2} \right\};$$

если  $2\lambda \geq 3$  и  $x \leq b$ , то

$$a(x) = -\pi m \left( \frac{x^m}{2^m m!} \right)^2 B_m^{-1}(z), \quad B_m(z) \equiv \frac{J_{m-1}(z)}{J_{m+1}(z)}; \quad (36)$$

$$r_{\text{eff}}(x) = -\frac{(2^m m!)^2}{2\pi m} \left( \frac{\alpha^{m-1}}{z^m} \right)^2 \left\{ z^2 \left[ \frac{1}{m-1} + \frac{B_m^2(z)}{m+1} \right] - 4m B_m(z) \right\}.$$

Теперь несложно рассмотреть случай  $V_0 > 0$ , когда потенциал  $V(x) = V_0\theta(b-x)$  является прямоугольным барьером, высота и ширина которого равны соответственно  $V_0$  и  $b$ . Выполнив в формулах (34)–(36) замены

$$\alpha \rightarrow i\alpha = i\sqrt{V_0}, \quad z \rightarrow iz = i\alpha x, \quad J_m(iz) \rightarrow i^m I_m(z), \quad (37)$$

получим следующие представления функций  $a(x)$  и  $r_{\text{eff}}(x)$  через модифицированные функции Бесселя  $I_m(z)$ : в случае  $\lambda = -1/2$ ,  $x \leq b$ ,

$$a(x) = \frac{\pi}{2} \frac{zI_1(z)}{I_0(z) - zI_1(z) \ln(x)}, \quad r_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{\pi\alpha^2} \left[ z^2 + 2 - 2z \frac{I_0(z)}{I_1(z)} \right]; \quad (38)$$

в случае  $\lambda = -1/2$ ,  $x \leq b$ ,

$$a(x) = \frac{\pi}{4} x^2 \frac{I_2(z)}{I_0(z)}, \quad r_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ 4 \ln(x) + [8I_2(z) - z^2 I_0(z)] \frac{I_0(z)}{[zI_2(z)]^2} \right\}; \quad (39)$$

если  $\lambda \geq 3/2$  и  $x \leq b$ , то

$$a(x) = \pi m \left( \frac{x^m}{2^m m!} \right)^2 B_m^{-1}(z), \quad B_m(z) \equiv \frac{I_{m-1}(z)}{I_{m+1}(z)}; \quad (40)$$

$$r_{\text{eff}}(x) = -\frac{(2^m m!)^2}{2\pi m} \left( \frac{\alpha^{m-1}}{z^m} \right)^2 \left\{ z^2 \left[ \frac{1}{m-1} + \frac{B_m^2(z)}{m+1} \right] - 4m B_m(z) \right\}.$$

Обсудим особенности поведения функций (34)–(36) на отрезке  $0 \leq x \leq b$ .

Как известно [24], в области  $z > 0$  все нули  $\gamma_{m+1,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , функции  $J_{m+1}(z)$  являются простыми. Поэтому при любом значении  $\lambda$  на полуинтервале  $0 < x \leq b$  функция  $a(x)$  не имеет нулей, если  $\alpha b < \gamma_{m+1,1}$ ,  $m = \lambda + 1/2$ , или имеет конечное число  $n$  простых нулей  $x_{m+1,j}^+ = \gamma_{m+1,j}/\alpha$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Число  $n$  равно максимальному значению номера  $i$ , при котором выполняется условие  $\gamma_{m+1,i} \leq \alpha b$ . При любом  $\lambda$  нули  $x_{m+1,j}^+$  функции  $a(x)$  являются полюсами соответствующей функции  $r_{\text{eff}}(x)$ . В случае  $2\lambda = -1$  эти полюса имеют первый порядок, а при условии  $2\lambda \geq 1$  — второй.

Случай  $2\lambda = -1$  является особым. В этом случае согласно формулам (34) все полюса  $x_{1,j}^-$  функции  $a(x)$  связаны с нулями  $z_j$  функции  $J_0(z) + zJ_1(z) \ln(x)$  соотношениями  $x_{1,j}^- = z_j/\alpha$ . Все нули  $z_j$  — простые. Поэтому на отрезке  $0 \leq x \leq b$  функция  $a(x)$  является гладкой, если  $z_1 > \alpha b$ , а в противном случае имеет конечное число  $n$  полюсов  $x_{1,j}^- = z_j/\alpha$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , первого порядка. Функция  $r_{\text{eff}}(x)$  в точке  $x = 0$  ограничена и отлична от нуля.

При любом  $\lambda \geq 1/2$  в силу равенств (35), (36) функция  $a(x)$  непрерывна на отрезке  $0 \leq x \leq b$ , если  $\gamma_{m-1,1}(z) > \alpha b$ , а при условии  $\gamma_{m-1,n} \leq b$  имеет конечное число  $n$  полюсов первого порядка  $x_{m-1,j} = \gamma_{m-1,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . В случае  $2\lambda \geq 1$  точка  $x = 0$  для функции  $r_{\text{eff}}(x)$  является полюсом второго порядка.

Так как нули  $\gamma_{m-1,j}$  и  $\gamma_{m+1,j}$  функции  $J_{m-1}(z)$  и  $J_{m+1}(z)$  перемежаются [24], то при любом  $\lambda$  этим же свойством обладают полюса  $x_{m,j}^-$  и нули

$x_{m,j}^+$  функции  $a(x)$ :

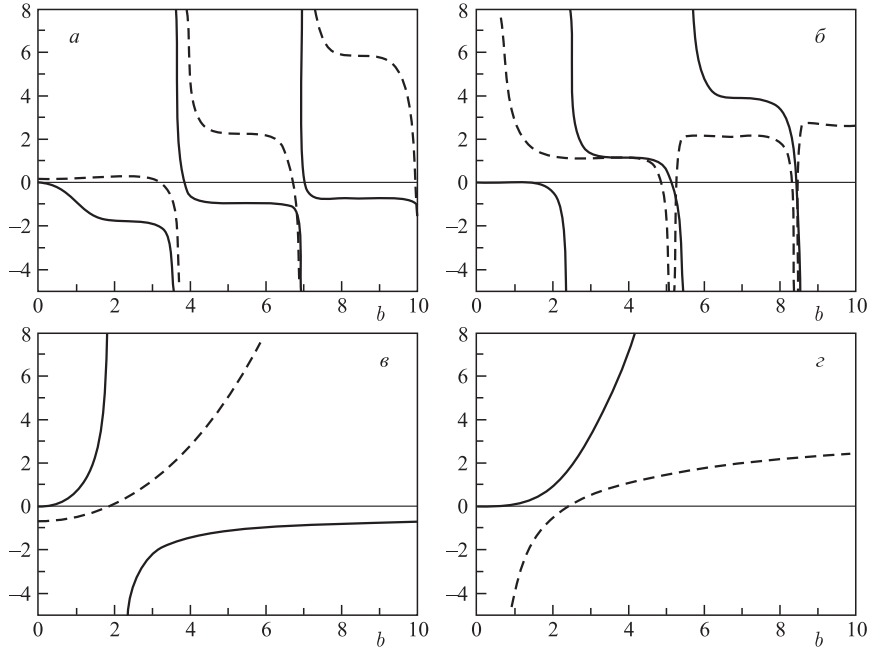
$$x_{m,j}^- < x_{m,j}^+ < x_{m,j+1}^- < x_{m,j+1}^+, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

По той же причине при любом  $\lambda$  перемежаются нули и полюса функции  $r_{\text{eff}}(x)$ .

Теперь перечислим основные особенности функций (38)–(40).

Известно [24], что на полуоси  $z > 0$  все функции  $I_m(z)$  положительные и монотонно возрастающие. Поэтому при любом  $\lambda > 1/2$  согласно формулам (39), (40) такими же свойствами обладает и функция  $a(x)$ , а функция  $r_{\text{eff}}(x)$  монотонно возрастает, но может иметь только один, причем простой, нуль, принадлежащий отрезку  $0 \leq x \leq b$ , и имеет только один полюс  $x = 0$ , причем второго порядка.

Случай  $2\lambda = -1$ , когда функции  $a(x)$  и  $r_{\text{eff}}(x)$  определены формулами (38), является исключительным. В этом случае на полуоси  $z > 0$  функция  $I_0(z) - zI_1(z) \ln(x)$  имеет один простой нуль  $z_1$ . Поэтому на отрезке



Зависимость масштабированных длины рассеяния  $\tau_1 a(b)$  (сплошная кривая) и эффективного радиуса  $\tau_2 r_{\text{eff}}(b)$  (штриховая кривая) от ширины  $b$  потенциала  $V(x) = V_0 \theta(b-x)$  прямоугольной формы в четырех случаях: а)  $V_0 = -1$ ,  $2\lambda = -1$ ,  $\tau_1 = 1$ ,  $\tau_2 = 1/4$ ; б)  $V_0 = -1$ ,  $2\lambda = 1$ ,  $\tau_1 = 1/10$ ,  $\tau_2 = 1$ ; в)  $V_0 = 1$ ,  $2\lambda = -1$ ,  $\tau_1 = 1$ ,  $\tau_2 = 1$  и г)  $V_0 = 1$ ,  $2\lambda = 1$ ,  $\tau_1 = 1$ ,  $\tau_2 = 1$ ; функция  $f(b) \equiv 0$  — тонкая прямая

$0 \leq x \leq b$  функция  $a(x)$  является положительной и монотонно возрастающей, если  $z_1 < \alpha b$ , а в противном случае эта функция имеет полюс первого порядка в точке  $x_{1,1}^- = z_1/\alpha$ . Функция  $r_{\text{eff}}(x)$  ограничена в точке  $x = 0$  и монотонно возрастает в области  $0 < x \leq b$ , в этой области она может иметь только один нуль, причем первого порядка.

Все перечисленные выше особенности функций  $a(x)$  и  $r_{\text{eff}}(x)$ , а также зависимость длины рассеяния  $a(b)$  и эффективного радиуса  $r_{\text{eff}}(b)$  от ширины  $b$  потенциала  $V = V_0\theta(b-x)$  прямоугольной формы в четыре случаях  $V_0 = \pm 1$ ,  $2\lambda = \pm 1$  иллюстрирует рисунок. Как видно, в этих случаях длина рассеяния и эффективный радиус могут принимать любые вещественные значения и имеет место описанная в предыдущем разделе корреляция между бесконечно малыми и бесконечно большими по абсолютной величине значениями этих параметров.

Как показано в работе [21], зная компоненты  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$ ,  $n = 0, 1$ , удовлетворяющие системам (24), (26), (29), (31), (33) и граничным условиям  $c_n(0) = \delta_{n,0}$  и  $s_0(0) = 0$ , нетрудно построить явную низкоэнергетическую асимптотику решения  $u_\lambda(x; q)$  краевой задачи Шредингера (2)–(4). Поэтому имеет смысл найти точные решения этих систем в случае потенциала прямоугольной формы.

Приступим к решению такой задачи. Сначала положим  $V(x) = V_0\theta(b-x)$ ,  $V_0 < 0$ ,  $\alpha = \sqrt{-V_0}$ . Исследуем систему двух уравнений (24). В отличие первого уравнения ее второе уравнение не содержит квадрата логарифмической функции и поэтому является более простым. Продифференцируем это уравнение по аргументу  $x$ . Используя тождество (23), исключим из полученного уравнения производную  $\partial_x c_0(x)$ . В результате выведем однородное уравнение

$$[\partial_x^2 - x^{-1}\partial_x + \alpha^2] s_0(x) = 0, \quad x > 0,$$

с граничным условием  $s_0(0) = 0$ . Подстановкой  $z = \alpha x$ ,  $s_0(x) = zZ(z)$  сведем это уравнение к известному уравнению [24] для функции Бесселя  $J_1(z)$  первого порядка. Теперь подставим найденную компоненту  $s_0(x) = zJ_1(z)$  в тождество (23). Полученное таким образом представление производной  $\partial_x c_0(x)$  запишем на отрезке  $[0, x]$  в интегральной форме. Для этого используем граничное условие  $c_0(0) = 1$ . Взяв интеграл, покажем, что  $c_0(x) = J_0(z) + zJ_1(z) \ln(x)$ .

Аналогичным способом последовательно исследуем оставшиеся системы уравнений (26), (29), (31) и (33). Решение каждой из них начнем с дифференцирования ее второго уравнения, не содержащего в отличие от первого степенного множителя  $x^{2\lambda+1}$ . Для исключения производных  $\partial_x s_0(x)$  или  $\partial_x s_1(x)$  из искомого уравнения для компонент  $c_0(x)$  или  $c_1(x)$  используем соответствующие выбранному значению  $\lambda$  тождества (25), (28), (30) или (32). После того как найдено решение уравнения для компоненты  $c_0(x)$  или  $c_1(x)$ , найдем

производную этой компоненты по аргументу  $x$ . Подставив эту производную в соответствующее тождество, получим представление производной  $\partial_x s_0(x)$  или  $\partial_x s_1(x)$ . Используя граничное условие  $s_0(0) = 0$ ,  $n = 0, 1$ , запишем это представление в виде интеграла. Вычислив его, найдем компоненту  $s_0(x)$  или  $s_1(x)$ .

Приведем найденные описанным выше способом представления компонент  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$ ,  $n = 0, 1$ , через функции Бесселя  $J_m(z)$  аргумента  $z = \alpha x$ ,  $\alpha \equiv \sqrt{-V_0}$ ,  $V_0 < 0$ .

Итак, для потенциала  $V(x)$  в виде прямоугольной ямы  $V(x) = V_0\theta(b-x)$ ,  $V_0 < 0$ , в случае  $2\lambda = -1$ ,  $x \leq b$ ,

$$\begin{aligned} c_0(x) &= J_0(z) + zJ_1(z) \ln(x), & s_0(x) &= zJ_1(z); \\ c_1(x) &= (x^2/4) \{zJ_1(z) [1 - \ln(x)] - J_2(z)\}, & s_1(x) &= -\alpha(x^3/4)J_1(z); \end{aligned} \quad (41)$$

в случае  $2\lambda = 1$ ,  $x \leq b$ ,

$$\begin{aligned} c_0(x) &= J_0(z), & s_0(x) &= x^2 J_2(z); \\ c_1(x) &= \frac{x^2}{2} J_2(z) \ln(x), & s_1(x) &= \frac{x^2}{8\alpha^2} [z^2 J_0(z) - 8J_2(z)]; \end{aligned} \quad (42)$$

а в случае  $2\lambda \geq 3$ ,  $x \leq b$ ,

$$\begin{aligned} c_0(x) &= wz^{1-m} J_{m-1}(z), & s_0(x) &= w\alpha^{-2m} z^{m+1} J_{m+1}(z); \\ & & w &\equiv 2^{m-1}(m-1)!; \\ c_1(x) &= -\frac{w}{4(m-1)\alpha^2} z^{3-m} J_{m+1}(z), \\ s_1(x) &= \frac{w}{\alpha^{2m+2}} \left[ \frac{z^2 J_{m-1}(z)}{4(m+1)} - mJ_{m+1}(z) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

На полюси  $x > b$  каждая из компонент  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$ ,  $n = 0, 1$ , тождественно равна своему значению в точке  $x = b$ .

Теперь нетрудно найти компоненты  $c_n(x)$ ,  $s_n(x)$ ,  $n = 0, 1$ , для потенциала  $V(x)$  в виде прямоугольного барьера:  $V(x) = V_0\theta(b-x)$ ,  $V_0 > 0$ . Выполним замены (37) в формулах (41)–(43), получим представления этих компонент через модифицированные функции Бесселя  $I_m(z)$ ,  $z = \alpha x$ ,  $\alpha = \sqrt{V_0}$ . Приведем такие представления.

В случае  $2\lambda = -1$ ,  $x \leq b$ ,

$$\begin{aligned} c_0(x) &= I_0(z) - zI_1(z) \ln(x), & s_0(x) &= -zI_1(z); \\ c_1(x) &= -(x^2/4) \{zI_1(z) [1 - \ln(x)] - I_2(z)\}, & s_1(x) &= \alpha(x^3/4) I_1(z); \end{aligned} \quad (44)$$



в случае  $2\lambda = 1$ ,  $x \leq b$ ,

$$\begin{aligned} c_0(x) &= I_0(z), \quad s_0(x) = -x^2 J_2(z); \\ c_1(x) &= -\frac{x^2}{2} I_2(z) \ln(x), \quad s_1(x) = \frac{x^2}{8\alpha^2} [z^2 I_0(z) - 8I_2(z)]; \end{aligned} \quad (45)$$

и, наконец, в случае  $2\lambda \geq 3$ ,  $x \leq b$ ,

$$\begin{aligned} c_0(x) &= wz^{1-m} I_{m-1}(z), \quad s_0(x) = -w\alpha^{-2m} z^{m+1} I_{m+1}(z); \\ w &\equiv 2^{m-1} (m-1)!; \\ c_1(x) &= \frac{w}{4(m-1)\alpha^2} z^{3-m} I_{m+1}(z), \\ s_1(x) &= \frac{w}{\alpha^{2m+2}} \left[ \frac{z^2 I_{m-1}(z)}{4(m+1)} - m I_{m+1}(z) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

В области  $x > b$  все компоненты  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$ ,  $n = 0, 1$ , тождественно равны их значениям в точке  $x = b$ .

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ РАССЕЯНИЯ И ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

Обсудим ряд (7) и его низкоэнергетическую ( $q \rightarrow 0+$ ) асимптотику (8) в бесконечно удаленной точке  $x = \infty$ . В случае нулевой длины рассеяния ( $a = 0$ ) первое слагаемое суммы (8) неограниченно и поэтому эта сумма не является низкоэнергетической асимптотикой ряда (7) при  $x = \infty$ . В случае бесконечно большой по модулю длины рассеяния ( $a = \pm\infty$ ) первое слагаемое обсуждаемой суммы равно нулю, а второе будет неограниченным по модулю, если  $r_{\text{eff}} = \pm\infty$ . Следовательно, и в этом случае ряд (7) в точке  $x = \infty$  имеет иную асимптотику.

Для анализа двух указанных выше случаев потребуются известные представления [21] функций  $K(x; q)$ ,  $a(x)$ ,  $r_{\text{eff}}(x)$  и  $P(x)$  через компоненты  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$  и основные свойства этих компонент [21]. На всей полуоси  $x > 0$  функция  $K(x; q)$  является дробью

$$K(x; q) = \tau \frac{c_0(x) + q^2 c_1(x) + q^4 c_2(x) + \dots}{s_0(x) + q^2 s_1(x) + q^4 s_2(x) + \dots}; \quad (47)$$

функции  $a(x)$  и  $r_{\text{eff}}(x)$  определяются формулами (22) и (27), а функция  $P(x)$  — формулой

$$P(x) = -\frac{1}{r_{\text{eff}}^3(x)} \frac{1}{2s_0(x)} \left[ 2\tau c_2(x) - s_2(x) \frac{c_0(x)}{s_0(x)} - s_1(x) r_{\text{eff}}(x) \right], \quad (48)$$

компоненты  $c_0(x)$  и  $s_0(x)$  не имеют общих нулей.

Перечислим важные следствия этого свойства компонент  $c_0(x)$  и  $s_0(x)$ . Пусть в некоторой точке  $x = b > 0$  компонента  $s_0(x)$  имеет нуль первого порядка. Тогда в этой точке компонента  $c_0(x)$  отлична от нуля и в силу равенств (22) и (27) функция  $a(x)$  имеет нуль первого порядка, а функция  $r_{\text{eff}}(x)$  имеет полюс первого или второго порядка, если  $s_1(b) = 0$  или  $s_1(b) \neq 0$ . Согласно рис. *a* и *b* и формулам (34)–(36) для притягивающего потенциала прямоугольной формы первый случай реализуется при  $2\lambda = -1$ , а второй — при  $2\lambda \geq 1$ . Теперь предположим, что некоторая точка  $x = b > 0$  является нулем первого порядка компоненты  $c_0(x)$ . Тогда в этой точке компонента  $s_0(x)$  отлична от нуля и вследствие соотношений (22) и (27) функция  $a(x)$  имеет полюс первого порядка, а функция  $r_{\text{eff}}(x)$  принимает конечное ненулевое или нулевое значение. Как следует из рис. *в* и формул (38), для отталкивающего потенциала прямоугольной формы второй случай имеет место при  $2\lambda = -1$ .

Приступим к анализу особых случаев  $a = 0$  и  $a = \pm\infty$ . Для сокращения записи предельные при  $x \rightarrow \infty$  значения используемых функций  $K(x; q)$  и  $K^\pm(x; q)$  будем обозначать символами  $K(q)$  и  $K^\pm(q)$ , а значения всех компонент  $c_n(x)$ ,  $s_n(x)$  и функций  $a(x)$ ,  $r_{\text{eff}}(x)$ ,  $a^\pm(x)$  и  $r_{\text{eff}}^\pm(x)$  в точке  $x = \infty$  — соответствующими символами  $c_n$ ,  $s_n$  и  $a$ ,  $r_{\text{eff}}$ ,  $a^\pm$ ,  $r_{\text{eff}}^\pm$ .

Начнем с первого случая. Пусть  $a = 0$ . Тогда согласно равенству (22) имеем  $s_0 = 0$ , но  $c_0 \neq 0$ . Предположим, что  $s_1 \neq 0$ . В области  $x \gg 1$  введем функцию

$$K^+(x; q) \equiv \tau \frac{c_0(x) + q^2 c_1(x) + q^4 c_2(x) + \dots}{q^2 s_1(x) + q^4 s_2(x) + \dots} = -\frac{1}{a^+(x)} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}}^+(x) + \dots, \quad (49)$$

где по определению

$$a^+(x) \equiv -\frac{s_1(x)}{\tau c_0(x)}, \quad r_{\text{eff}}^+(x) \equiv \frac{2\tau}{s_1(x)} \left[ c_1(x) - s_2(x) \frac{c_0(x)}{s_1(x)} \right]. \quad (50)$$

Перейдем к пределу  $x \rightarrow \infty$ . В этом пределе благодаря равенству  $s_0 = 0$  из представлений (47) и (49) следует связь  $q^2 K^+(q) = K(q)$ , а формулы (22), (27), (48) и (50) порождают соотношения

$$a^+ \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} a^+(x) = (1/2) \lim_{x \rightarrow \infty} [a^2(x) r_{\text{eff}}(x)] \quad (51)$$

и соотношения

$$r_{\text{eff}}^+ \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} r_{\text{eff}}^+(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \{a^{-2}(x) [a(x) - 4r_{\text{eff}}(x)P(x)]\}. \quad (52)$$

Используя определение (8) функции эффективного радиуса  $\bar{K}(q)$ , через фазу рассеяния  $\delta_\lambda(q)$ , связь  $q^2 K^+(q) = K(q)$  и равенство (49), взятое при  $x = 0$ ,

получаем искомые представления

$$K^+(q) \equiv q^{2\lambda+3} [\text{ctg } \delta_\lambda(q) - h(q)] = -\frac{1}{a^+} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}}^+ + \dots \quad (53)$$

Эти представления означают, что в рассмотренном случае  $a = 0$  вместо функции эффективного радиуса  $K(q)$ , нулевой длины рассеяния  $a$  и эффективного радиуса  $r_{\text{eff}}$  следует использовать функцию эффективного радиуса  $K^+(q)$ , ненулевую длину рассеяния  $a^+$  и конечный эффективный радиус  $r_{\text{eff}}^+$ , определенные формулами (51) и (52).

Теперь исследуем второй особый случай. Положим  $|a| = \infty$ . Тогда из равенства (22) следует, что  $c_0 = 0$ , но  $s_0 \neq 0$ . Предположим, что  $c_1 \neq 0$ . В области  $x \gg 1$  введем функцию

$$K^-(x; q) \equiv \tau \frac{q^2 c_1(x) + q^4 c_2(x) + \dots}{s_0(x) + q^2 s_1(x) + q^4 s_2(x) + \dots} = -\frac{1}{a^-(x)} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}}^-(x) + \dots, \quad (54)$$

а функции  $a^-(x)$  и  $r_{\text{eff}}^-(x)$  определим формулами

$$a^-(x) \equiv -\frac{s_0(x)}{\tau c_1(x)}, \quad r_{\text{eff}}^-(x) \equiv \frac{2\tau}{s_0(x)} \left[ c_2(x) - s_1(x) \frac{c_1(x)}{s_0(x)} \right]. \quad (55)$$

В пределе  $x \rightarrow \infty$  благодаря равенству  $c_0 = 0$  представления (47) и (54) порождают связь  $q^{-2} K^-(q) = K(q)$ , а из формул (22), и (27), (48) и (55) следуют соотношения

$$a^- = -2/r_{\text{eff}}, \quad r_{\text{eff}}^- = r_{\text{eff}}^3 P. \quad (56)$$

Используя определение (8) функции  $K(q)$ , связь  $q^{-2} K^-(q) = K(q)$  и равенство (54), взятое при  $x = \infty$ , получаем искомые представления

$$K^-(q) \equiv q^{2\lambda-1} [\text{ctg } \delta_\lambda(q) - h(q)] = -\frac{1}{a^-} + \frac{q^2}{2} r_{\text{eff}}^- + \dots \quad (57)$$

Согласно этим представлениям в рассмотренном случае  $|a| = \infty$  вместо функции эффективного радиуса  $K(q)$ , бесконечно большой по модулю длины рассеяния  $a$  и ненулевого эффективного радиуса  $r_{\text{eff}}$  следует использовать функцию эффективного радиуса  $K^-(q)$ , конечную и ненулевую длину рассеяния  $a^-$  и конечный эффективный радиус  $r_{\text{eff}}^-$ , определенные формулами (56).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Просуммируем основные результаты настоящей работы.

В разд. 2 нелинейная версия метода фазовых функций расширена на случай двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом. Расширение заключается в выводе и качественном анализе новых уравнений (12)–(20), предназначенных для вычисления функции эффективного радиуса, длины рассеяния и эффективного радиуса. В разд. 3 получены точные решения (34)–(40) уравнений (13)–(17) в случае потенциала прямоугольной формы и исследована зависимость длины рассеяния и эффективного радиуса от ширины такого потенциала. В разд. 4 исследованы два особых случая ( $a = 0, |a| = \infty$ ) и в этих случаях предложены новые определения (51)–(53) и (56), (57) функции эффективного радиуса  $K^\pm(q)$  длины рассеяния  $a^\pm$  и эффективного радиуса  $r_{\text{eff}}^\pm$ . Стоит отметить, что уравнения (12)–(20), их точные решения (34)–(40) и представления (51), (52) и (56) параметров  $a^\pm$  и  $r_{\text{eff}}^\pm$  получены для любого возможного значения квантового числа  $\lambda$ .

Поясним возможное применение перечисленных выше результатов. Вычислив длину рассеяния и эффективный радиус и используя затем асимптотику (8), нетрудно найти низкоэнергетическое приближение фазы  $\delta_\lambda(q)$ , а затем по формуле (5) определить соответствующее приближение сечения  $\sigma_\lambda(q)$ . Представления (34)–(40) длины рассеяния и эффективного радиуса через функции Бесселя в случае потенциала прямоугольной формы и соответствующие таким представлениям приближения парциальных фаз и сечений предлагается использовать в теоретической физике ультрахолодных газов для моделирования упругого двумерного рассеяния в системе двух атомов или молекул. Полученные для такого же потенциала представления (41)–(46) компонент  $c_n(x)$  и  $s_n(x)$  через функции Бесселя позволяют найти в явном виде низкоэнергетическую асимптотику радиальной волновой функции  $u_\lambda(x; q)$  двумерного относительного движения двух атомов или молекул.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). Т. 3. 6-е изд., испр. М.: Физматлит, 2004.
2. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
3. Тейлор Дж. Теория рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
4. Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
5. Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
6. Браун Дж. Е., Джексон А. Д. Нуклон-нуклонные взаимодействия. Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1979.

7. *Bethe H. A.* // *Phys. Rev.* 1949. V. 76. P. 38.
8. *Modugno G. et al.* // *Phys. Rev. A.* 2003. V. 68. P. 011601.
9. *Clade P. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 170401.
10. *Caar L. D. et al.* // *New J. Phys.* 2009. V. 11. P. 055049.
11. *Servane F. et al.* // *Science.* 2011. V. 332. P. 336.
12. *Lapidus I. R.* // *Am. J. Phys.* 1982. V. 50. P. 45.
13. *Lapidus I. R.* // *Am. J. Phys.* 1986. V. 54. P. 459.
14. *Verhaar B. J. et al.* // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1984. V. 17. P. 595.
15. *Verhaar B. J. et al.* // *Phys. Rev. A.* 1985. V. 32. P. 1424.
16. *Khuri N. N. et al.* // *J. Math. Phys.* 2009. V. 50. P. 072105.
17. *Bollé D., Gesztesy F.* // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 52. P. 1469.
18. *Bollé D., Gesztesy F.* // *Phys. Rev. A.* 1984. V. 30. P. 1279.
19. *Adhikari S. K., Gibson W. G.* // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 46. P. 3967.
20. *Rakityansky S. A., Elander N.* // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2012. V. 45. P. 135209.
21. *Пунышев В. В.* Рассеяние медленной квантовой частицы аксиально-симметричным короткодействующим потенциалом. Препринт ОИЯИ Р4-2012-119. Дубна, 2012.
22. *Adhikari S. K.* // *Am. J. Phys.* 1986. V. 54. P. 362.
23. *Averbuch P. G.* // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1986. V. 19. P. 2325.
24. *Абарамовиц М., Стигун И.* Справочник по специальным функциям. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
25. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. Пер. с франц. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

Получено 29 июля 2013 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 21.10.2013.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,37. Уч.-изд. л. 1,65. Тираж 270 экз. Заказ № 58089.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)