P4-2013-85

В. В. Пупышев [*]

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА В ЗАДАЧЕ ДВУМЕРНОГО РАССЕЯНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫМ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

[*] E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В. Р4-2013-85
Приближение эффективного радиуса в задаче двумерного рассеяния центральным короткодействующим потенциалом

Исследуется роль слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы в ее упругом низкоэнергетическом рассеянии. Энергии таких состояний определяются в приближении эффективного радиуса через корни трансцендентных уравнений. Это же приближение используется для анализа рассеяния. Получены и исследованы явные низкоэнергетические асимптотики всех парциальных фаз и сечений. Эти асимптотики содержат энергии слабосвязанных или околопороговых резонансных состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2013

Pupyshev V. V. P4-2013-85
Effective-Range Approximation in the Problem of Two-Dimensional Scattering by a Central Short-Range Potential

The role of weakly-bound and near-threshold resonance states of a quantum particle in its elastic low-energy scattering is studied. The energies of those states are defined in the effective-range approximation via the roots of the transcendental equations. This approximation is also used for analysis of the scattering. Explicit low-energy asymptotics of all partial phase-shifts and cross-sections are obtained and investigated. These asymptotics contain the energies of weakly-bound and near-threshold resonance states.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что квантовая частица p_1 движется в трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ в поле неподвижного силового центра O, который воздействует на нее посредством центрального короткодействующего потенциала. Как известно [1–4], в этом случае сохраняющимися квантовыми числами являются волновое число k и угловой момент $\ell = 0, 1, \dots$ частицы p_1. Функция эффективного радиуса [1, 4] для состояния рассеяния $|k, \ell\rangle$ этой же частицы в трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ определяется через парциальную фазу $\delta_\ell(k)$ рассеяния формулой

$$K(k) \equiv k^{2\ell+1} \operatorname{ctg} \delta_\ell(k) = -1/a + (k^2/2)\, r_{\text{eff}} + \dots$$

Приближением эффективного радиуса [1, 4] принято называть аппроксимацию функции $K(k)$ суммой двух первых слагаемых ее разложения в бесконечный ряд по четным степеням аргумента k. Такая сумма содержит две константы: длину рассеяния a и эффективный радиус r_{eff}.

В ядерную физику низких энергий приближение эффективного радиуса для случая S-волнового ($\ell = 0$) рассеяния короткодействующим потенциалом ввел Х. А. Бете [5]. Изящное обобщение этого приближения для произвольного значения углового момента ℓ предложено Г. Ф. Друкаревым [6]. Надежный способ, предназначенный для вычисления констант a и r_{eff} при любом значении ℓ и основанный на нелинейной версии метода фазовых функций, подробно изложен В. В. Бабиковым в его монографии [4]. Как показано в недавних работах [7–9], для расчета этих констант удобнее использовать рекуррентную цепочку энергонезависимых линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которую нетрудно вывести, стартуя с линейной версии метода фазовых функций [3].

Обобщение приближения эффективного радиуса на случай суперпозиции кулоновского и короткодействующего потенциала начато с работы Л. Д. Ландау и Я. А. Смородинского [10]. Обширный список исследований, инициированных этой работой и посвященных способам вычислений кулон-ядерных длины рассеяния и эффективного радиуса, дан в обзорах низкоэнергетических приближений в ядерной физике [11, 12].

Одним из традиционных приложений приближения эффективного радиуса в теоретической и экспериментальной ядерной физике низких энергий является решение задачи экстраполяции парциальных фаз $\delta_\ell(k)$ и соответствующих сечений в область сверхнизких энергий [11, 12], недоступных для экспериментального исследования. Другая не менее важная прикладная задача ядерной физики низких энергий и ядерной астрофизики заключается в определении вершинных констант [13, 14] процессов развала легкого ядра A на два фрагмента B и C. В работах [15–18] для решения этой задачи успешно использовался метод, основанный на аналитическом продолжении одноканальной функции эффективного радиуса $K(k)$ в точку полюса парциальной амплитуды рассеяния двух ядер-фрагментов B и C, отвечающую их связанному состоянию A. В недавних работах [19, 20] предложено обобщение этого метода на случай двух каналов и на случай суперпозиции кулоновского и короткодействующего (ядерного) взаимодействий. Использование такого обобщения представляется перспективным подходом к исследованию ядерных реакций, протекающих при столкновении протонов, каналируемых в кристаллической среде, с легкими ядрами, имплантированными в нее. Ожидаемое увеличение скорости протекания таких реакций основано на давно известном и экспериментально подтвержденном эффекте каналирования заряженных частиц в кристалле [21], физически прозрачных качественных соображениях [22] и на двух теоретически предсказанных эффектах: эффекте сверхфокусировки [23] и эффекте резонансного каналирования пучка заряженных частиц в кристалле [24].

В работе [22] показано, что волновая функция столкновения ядра, движущегося вдоль кристаллографической оси, с ядром, имплантированным в кристалл, подчиняется двумерному уравнению Шредингера. В системе центра масс сталкивающихся ядер такую волновую функцию можно интерпретировать как волновую функцию квантовой частицы p_1, обладающей массой m_1, равной приведенной массе этих ядер, и движущуюся и вдоль кристаллографической оси, и в перпендикулярной этой оси двумерной плоскости $\mathcal{P}$ трехмерного координатного пространства $\mathcal{R}^3$ этой же частицы.

Как известно [1, 25–35], движение медленной квантовой частицы в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ имеет две особенности по сравнению с ее движением в трехмерном пространстве. Во-первых, в поле любого сколь угодно слабого, но притягивающего потенциала, убывающего быстрее кулоновского, квантовая частица имеет по крайней мере одно слабосвязанное состояние [1, 25, 26, 36]. Во-вторых, сечение рассеяния квантовой частицы любым короткодействующим, в том числе и финитным потенциалом, неограниченно возрастает в пределе ее нулевой полной энергии [1, 27, 28, 35], причем старшее слагаемое асимптотики сечения в этом пределе никак не зависит от потенциала и описывается неаналитической функцией энергии, равной ее логарифму. Эту же логарифмическую функцию энергии содержат и все известные к настоящему времени определения [29–35] функции эффективного радиуса и длины двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом.

Как отмечалось в работах [37–39], наличие слабосвязанного состояния квантовой частицы, движущейся в двумерной плоскости, существенно меняет сечение ее низкоэнергетического упругого рассеяния.

Анализ столкновения двух легких ядер в плоскости, перпендикулярной каналируемому пучку, является нашей конечной целью и представляется особо интересным из-за перечисленных выше существенных отличий двумерного рассеяния от трехмерного. Достижение этой цели невозможно без последовательного построения теории двумерного низкоэнергетического рассеяния, которое логично начать с детального решения наиболее простой задачи о движении медленной квантовой частицы в поле центрального короткодействующего потенциала. Первый этап решения этой задачи заключается в создании асимптотического в пределе низких энергий метода, предназначенного для вычисления всех парциальных фаз, сечений и радиальных волновых функций упругого рассеяния квантовой частицы. Этот этап преодолен в работе [35]. Следующей по сложности задачей является анализ условий, достаточных для существования слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы. Такой анализ дан в предыдущей работе [36]. Особо интересным для практических приложений представляется исследование особенностей низкоэнергетического поведения всех парциальных фаз и сечений, порождаемых такими состояниями. Решению этой задачи в рамках двумерного аналога [35, 36] приближения эффективного радиуса посвящена настоящая работа.

Все используемые в ней особо значимые определения и известные соотношения собраны в разд. 1. В разд. 2 дан анализ околопороговых особенностей парциальных фаз и сечений упругого рассеяния, порожденных присутствием особых состояний рассеяния, слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний. В заключении суммируются основные результаты выполненного анализа и обсуждаются возможные способы их применения.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Поясним обозначения и определения, принятые в предыдущих работах [35, 36], а затем перечислим доказанные в этих же работах утверждения и соотношения.

Начнем с физических предположений. Полагаем, что квантовая частица p_1 движется лишь в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ ее координатного пространства $\mathcal{R}^3$. Считаем, что некоторая неподвижная точка O этой плоскости является силовым центром, воздействующим на частицу p_1 посредством потенциала V, который зависит только от обезразмеренного расстояния x между точкой O и этой частицей и подчинен следующим условиям:

$$\lim_{x\to 0} x^2|V(x)| = 0; \quad V(x) \in \mathcal{C}^0(0,\infty); \quad \lim_{x\to\infty} x^n|V(x)| = 0,\ n = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Такой потенциал принято называть центральным, слабосингулярным в нуле, непрерывным на всей полуоси $x > 0$ и короткодействующим. Вследствие перечисленных выше свойств потенциала $V(x)$ полный набор квантовых чисел частицы p_1 состоит из ее обезразмеренного волнового числа q и полуцелого числа $\lambda = -1/2, 1/2, \ldots$, а радиальная волновая функция $u_\lambda(x;q) = \langle x|q,\lambda\rangle$ физического состояния $|q,\lambda\rangle$ этой частицы определяется как регулярное (ограниченное на всей полуоси $x > 0$) решение одномерного уравнения Шредингера

$$\left[\partial_x^2 + q^2 - \lambda(\lambda+1)\,x^{-2} - V(x)\right]\, u_\lambda(x;q) = 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

с начальным условием $u_\lambda(x;q) \sim (qx)^{\lambda+1}$, $qx \to 0$, и вполне определенной асимптотикой в области $qx/|\lambda| \gg 1$. Все регулярные на полуоси $x > 0$ решения уравнения (2) с таким начальным условием и комплексным параметром q имеют асимптотику

$$u_\lambda(x;q) \to N(q)\left[A^+(q)\exp(iqx) - A^-\exp(-iqx)\right], \quad |q|x/|\lambda| \to \infty, \tag{3}$$

где по определению i — мнимая единица,

$$A^\pm(q) \equiv (2i)^{-1}\,\exp\{\mp i\,[\pi\lambda/2 - \delta_\lambda(q)]\},$$

а $N(q)$ и $\delta_\lambda(q)$ — некоторые комплекснозначные функции аргумента q. При условиях (1) такие решения существуют, если $q > 0$ или $q = ip$, где $p \geqslant 0$. Это утверждение останется в силе, если для некоторых положительных чисел q_0 и q_1 положить $q = q_1 - iq_2$, $q_2 \in (0, q_0]$ и вместо последнего из условий (1) потребовать суммируемость функции $|V(x)|\exp(2q_0x)$ в области $x \gg 1$. Далее считается, что $q_0 \equiv 2\exp(-\gamma) = 1{,}122918\ldots$, где γ — константа Эйлера.

Из множества всех регулярных решений с асимптотиками (3) радиальная волновая функция u_λ состояния упругого рассеяния $|q,\lambda\rangle$ выделяется условиями $q > 0$ и $N(q) = 1$. Эта функция имеет асимптотику

$$u_\lambda(x;q) \to \sin\,[qx - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda(q)], \quad qx/|\lambda| \to \infty.$$

Величины $\delta_\lambda(q)$ и $\sigma_\lambda(q)$ называются парциальными фазой и сечением упругого рассеяния в состоянии $|q,\lambda\rangle$. Сечение $\sigma_\lambda(q)$ вычисляется по формулам

$$\sigma_\lambda(q) \equiv \frac{\sigma_\lambda^u(q)}{[\,\mathrm{ctg}\,\delta_\lambda(q)\,]^2 + 1}, \quad \sigma_\lambda^u(q) \equiv \frac{4}{q}\,(2 - \delta_{2\lambda,-1}). \tag{4}$$

Здесь и далее $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Сечение $\sigma_\lambda(q)$ достигает своего унитарного предела $\sigma^u_\lambda(q)$, если волновое число q равно положительному корню p уравнения $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(p) = 0$, а фаза $\delta_\lambda(p)$ кратна числу $\pi/2$. Состояние рассеяния $|p, \lambda\rangle$ с таким волновым числом считаем особым. Предел $q \to 0+$ назовем пределом низких энергий. Нулевое значение безразмерной энергии рассеяния $E = q^2$ называем пороговым, потому что при переходе через него в область $E < 0$ состояния рассеяния исчезают.

Связанные состояния выделяются из всех остальных регулярных решений совокупностью следующих условий: $q = ip$, $p \geqslant 0$;

$$u_\lambda(x; ip) \sim \exp(-px), \quad px/|\lambda| \to \infty\,; \quad \int\limits_0^\infty |u_\lambda(x)|^2\, dx = 1,$$

и поэтому существуют тогда и только тогда, когда волновое число q равно корню ip, $p > 0$, уравнения $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(ip) = i$. В связанном состоянии $|ip, \lambda\rangle$ частица p_1 имеет отрицательную или нулевую полную энергию $E = -p^2$, которой соответствует неотрицательная энергия связи $B \equiv -E = p^2$.

Резонансное состояние частицы p_1 определяется как состояние $|q, \lambda\rangle$ с комплексным волновым числом $q = q_1 - iq_2$, $q_1 > 0$, $q_2 \in (0, q_0)$, которому отвечает регулярное решение u_λ, обладающее асимптотикой в виде расходящейся круговой волны:

$$\langle x|q, \lambda\rangle = u_\lambda(x; q_1 - iq_2) \to \exp\left\{q_2 x + i\left[q_1 x - \pi\lambda/2 + \delta_\lambda(q)\right]\right\}, \qquad |q|x/|\lambda| \to \infty.$$

Асимптотика (3) общего регулярного решения совпадает с такой асимптотикой тогда и только тогда, когда $N(q) = 1$, а волновое число q равно корню $q_1 - iq_2$ уравнения $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q_1 - iq_2) = i$, $q_1 > 0$, $q_2 \in (0, q_0)$. Это уравнение определяет весь дискретный спектр резонансных состояний квантовой частицы p_1. По определению число $q = q_1 - iq_2$ принадлежит четвертому квадранту комплексной плоскости волновых чисел. В этом квадранте удобно использовать специальные полярные координаты (p, ω) — модуль $p = |q|$ и угол ω, отсчитываемый от полуоси положительных вещественных значений и определенный следующими формулами:

$$q = p\exp\left[i(2\pi - \omega)\right] = p\,\exp(-i\omega), \quad \omega \equiv \operatorname{arctg}(q_2/q_1) \in (0, \pi/2). \tag{5}$$

В координатах (p, ω) полная безразмерная энергия E резонансного состояния $|q, \lambda\rangle = |(p, \omega), \lambda\rangle$ представляется через энергию резонанса E_r и его ширину Γ формулами

$$E \equiv q^2 = E_r - i\Gamma/2, \quad E_r \equiv p^2\,\cos 2\omega, \quad \Gamma \equiv 2p^2\,\sin 2\omega. \tag{6}$$

Слабосвязанными состояниям считаем связанные состояния $|ip, \lambda\rangle$, $0 < p \ll q_0$, а состояния $|q, \lambda\rangle$, $|q| \ll q_0$, называем околопороговыми состояниями упругого ($q > 0$) или резонансного ($q = q_1 - iq_2$) рассеяния.

При условиях (1) для каждого состояния рассеяния $|\lambda, q\rangle$, $q > 0$, с выбранным значением λ функция эффективного радиуса $K(q)$ является рядом по четным степеням волнового числа q и вводится соотношениями

$$K(q) \equiv q^{2\lambda+1} \left[\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q) - h(q)\right] = -\frac{1}{a} + \frac{q^2}{2}\, r_{\text{eff}} + O\left((|q|/q_0)^4\right). \tag{7}$$

Здесь и всюду далее

$$h(q) \equiv (2/\pi)\ \left[\ln\left(q/2\right) + \gamma\right] = (2/\pi)\ \ln\left(q/q_0\right), \tag{8}$$

а коэффициенты a и r_{eff} называются длиной рассеяния и эффективным радиусом. Особые случаи $a = 0$ и $a = \pm\infty$ в настоящей работе не рассматриваются. Если потребовать суммируемость функции $|V(x)| \exp\left(2q_0 x\right)$ при $x \gg 1$, то представления (7) можно будет использовать как аналитическое продолжение функции эффективного радиуса в область $\mathcal{A} \equiv \{q :\ |\arg q| \leqslant \pi/2, \operatorname{Im} q \geqslant -q_0\}$ комплексной плоскости волнового числа q.

При любых допустимых значениях числа λ, длины рассеяния $a \neq 0, \pm\infty$, эффективного радиуса $r_{\text{eff}} \neq \pm\infty$ под приближением эффективного радиуса в области $\mathcal{A}$ подразумеваем замену функции $K(q)$ суммой слагаемых $-1/a$ и $(q^2/2)\, r_{\text{eff}}$. В этом приближении функция $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q)$ определяется формулой

$$\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q) \approx h(q) + q^{-2\lambda-1}\ \left[-\frac{1}{a} + \frac{q^2}{2}\, r_{\text{eff}}\right], \quad 0 < |q| \ll q_0, \tag{9}$$

а сечение упругого рассеяния (7) — формулой

$$\sigma_\lambda(q) \approx \frac{4\left(2 - \delta_{2\lambda,-1}\right) a^2\, q^{4\lambda+1}}{\left[1 - (q^2/2)\, a\, r_{\text{eff}} - a\, q^{2\lambda+1}\, h(q)\right]^2 + a^2\, q^{4\lambda+2}}, \quad 0 < q \ll q_0. \tag{10}$$

В случае $2\lambda = -1$ и $q/q_0 \to 0$ приближения (9) и (10) фазы и сечения рассеяния воспроизводит их давно известные асимптотики [1]: $\delta_\lambda(q) \sim (\pi/2)/\ln\left(q/q_0\right)$ и

$$\sigma_\lambda(q) \sim \frac{4\pi^2}{q}\, \frac{1}{\left[\,2\, \ln\left(q/q_0\right)\right]^2 + \pi^2}, \quad 2\lambda = -1, \quad q/q_0 \to 0. \tag{11}$$

Старшее слагаемое $(\pi/2)/\ln q$ асимптотики фазы $\delta_\lambda(q)$ при $2\lambda = -1$ и $q/q_0 \to 0$ не зависит ни от знака, ни от формы потенциала $V(x)$. Поэтому для определения значения этой фазы в точке $q = 0$ требуются дополнительные ограничения. В качестве таковых по аналогии с трехмерным рассеянием [4] будем считать, что фаза $\delta_\lambda(q)$ должна быть положительной или отрицательной, если в сколь угодно малой полуокрестности $(0, x_0)$, $x_0 \ll 1$, точки $x = 0$ потенциал $V(x)$ является притягивающим $(V < 0)$ или отталкивающим $(V > 0)$. При таком определении из представления (9) и известных свойств котангенса следует, что в любом из этих случаев фаза $\delta_\lambda(q)$ монотонно убывает с ростом ее аргумента, но в пределе $q \to 0+$ эта фаза сходится слева к числу π в первом случае и к нулю во втором.

В силу определений (5), (8) и аппроксимации (9) в приближении эффективного радиуса уравнению $\operatorname{ctg}\delta(p) = 0$, $0 < p \ll q_0$, отвечает эталонное уравнение

$$p^{2\lambda+1}\,\frac{2}{\pi}\,\ln\frac{p}{q_0} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\,r_{\text{eff}}p^2, \tag{12}$$

уравнению $\operatorname{ctg}\delta(ip) = i$, $0 < p \ll q_0$, соответствует эталонное уравнение

$$p^{2\lambda+1}\,\frac{2}{\pi}\,\ln\frac{p}{q_0} = (i)^{-2\lambda-1}\,\left[\frac{1}{a} + \frac{p^2}{2}\,r_{\text{eff}}\right], \tag{13}$$

а уравнение $\operatorname{ctg}\delta(q_1 - iq_2) = i$, $|p| \ll q_0$, порождает систему эталонных уравнений

$$p^{2\lambda+1}\,\frac{2}{\pi}\,\ln\frac{p}{q_0} = \frac{1}{a}\,\cos\left[(2\lambda+1)\omega\right] - \frac{p^2}{2}\,r_{\text{eff}}\,\cos\left[(2\lambda-1)\omega\right], \tag{14}$$

$$p^{2\lambda+1}\left[1 + \frac{2}{\pi}\omega\right] = -\frac{1}{a}\,\sin\left[(2\lambda+1)\omega\right] + \frac{p^2}{2}\,r_{\text{eff}}\,\sin\left[(2\lambda-1)\omega\right]. \tag{15}$$

Завершим настоящий раздел обсуждением уравнений (12)–(15).

Заметим, что уравнения (12) и (13) имеют одинаковые левые части, а их правые части отличаются знаком первого или второго слагаемых, если число $2\lambda + 1$ не кратно или кратно четырем. Следовательно, корни p_1 и p_2 обсуждаемых уравнений (12) и (13) совпадают только при условиях $r_{\text{eff}} = 0$ и $2\lambda = -1, 3, 7, \ldots$ Лишь в этом случае энергия $E = p_1^2$ особого околопорогового состояния рассеяния $|p_1, \lambda\rangle$ равна энергии связи $B = p_2^2$ слабосвязанного состояния $|ip_2, \lambda\rangle$.

Выявим связь между числом корней эталонных уравнений (12) и (13).

Предположим, что значение λ задано и уравнение (13) имеет два корня p_1 и p_2. Следовательно, существуют два слабосвязанных состояния. Положив для определенности $p_1 < p_2$, найдем графическим способом число корней уравнения (12), которое по определению равно числу особых состояний рассеяния $|p, \lambda\rangle$. Пусть $2\lambda = -1$. Уравнение (13) имеет два корня, если $a < 0$ и $r_{\text{eff}} > 0$. В этом случае уравнение (12) отличается от уравнения (13) лишь знаком слагаемого $p^2 r_{\text{eff}}/2$. Значит, уравнение (12) является уравнением (13), в котором $a < 0$ и $r_{\text{eff}} < 0$. При таких условиях это уравнение, а следовательно, и уравнение (12) имеет только один корень p, причем такой, что $p < p_1$. Теперь положим $2\lambda = 1$. Уравнение (13) имеет два корня, если $a > 0$ и $r_{\text{eff}} > 0$. В этом случае уравнение (12) отличается от уравнения (13) лишь знаком слагаемого $1/a$. Поэтому уравнение (12) является уравнением (13), в котором $a < 0$ и $r_{\text{eff}} > 0$. При таких условиях это уравнение, а следовательно, и уравнение (12) имеет единственное решение p, причем такое, что $p < p_1$. Случай $2\lambda \geqslant 3$ нетрудно исследовать по аналогии с рассмотренными выше случаями $2\lambda = \pm 1$ и в итоге показать, что при $2\lambda \geqslant 3$ уравнение (12) имеет один корень p, если $a > 0$, и два корня $p = p_-$ и $p = p_+$, если $a < 0$.

Теперь предположим, что значение λ выбрано и уравнение (12) имеет два корня p_1 и p_2. Следовательно, существуют два особых состояния рассеяния. Считая, что $p_1 < p_2$, найдем графическим способом число корней n уравнения (13), которое по определению равно числу слабосвязанных состояний $|ip, \lambda\rangle$. В итоге получим следующее соответствие: если $2\lambda = -1$, то $n = 1$ и $p < p_1$, если $2\lambda \geqslant 1$, то $n = 1$ и $p > p_2$ при условии $a < 0$, в противном случае $n = 2$.

Убедимся в том, что волновое число p особого состояния рассеяния $|p, \lambda\rangle$ не может быть модулем $|q_r|$ волнового числа околопорогового резонансного состояния $|q_r, \lambda\rangle$. Предположим противное: пусть p является и решением уравнения (12), и таким модулем. Тогда уравнение (14) сводится к уравнению, которое имеет решение только при $\omega = 0$, но по определению $\omega \in (0, \pi/2)$. В силу полученного противоречия высказанное выше утверждение верно.

2. ОКОЛОПОРОГОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФАЗ И СЕЧЕНИЙ

Первый параграф настоящего раздела является вспомогательным. В нем исследуется околопороговое поведение фазы и сечения при наличии особого состояния рассеяния. Такое исследование необходимо для того, чтобы в следующих двух параграфах выявить эффекты, порождаемые в рассеянии только слабосвязанными или же только околопороговыми резонансными состояниями.

2.1. Влияние особого состояния рассеяния. Исследуем околопороговое поведение фазы $\delta_\lambda(q)$ и сечения $\sigma_\lambda(q)$ упругого рассеяния квантовой частицы в состоянии $|q, \lambda\rangle$ при наличии ее особого состояния $|p, \lambda\rangle$, фаза которого $\delta_\lambda(p)$ кратна числу $\pi/2$. Считаем, что значения λ, a и r_{eff} заданы и при таких значениях уравнение (12) имеет один корень p, но уравнение (13) не имеет корней на полуинтервале $(0, p+\epsilon]$, $\epsilon/p \ll 1$, и на таком полуинтервале система уравнений (14) и (15) несовместна. Тогда имеется особое околопороговое состояние рассеяния $|p, \lambda\rangle$, но отсутствуют и слабосвязанное, и околопроговое резонансное состояния, модули волновых чисел которых меньше или равны числу $p+\epsilon$. Так как p — корень уравнения (12), то из приближения (9) функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)$, содержащего два параметра a и r_{eff}, можно исключить один из них. В итоге получится следующее представление функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)$ через параметры r_{eff} и p:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) &\approx y_\lambda^+(q;p) + \frac{r_{\text{eff}}}{2}\frac{q^2-p^2}{q^{2\lambda+1}}, \\ y_\lambda^+(q;p) &\equiv h(q) - \left(\frac{p}{q}\right)^{2\lambda+1} h(p), \quad q \ll q_0, \end{aligned} \tag{16}$$

или представление этой же функции, но через параметры a и p:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\delta_\lambda(q) &\approx y_\lambda^-(q;p) - \frac{1}{ap^2}\frac{q^2-p^2}{q^{2\lambda+1}}, \\ y_\lambda^-(q;p) &\equiv h(q) - \left(\frac{p}{q}\right)^{2\lambda-1} h(p)\,, \quad q \ll q_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Соответствующие таким приближениям фазу и сечение (4) обозначим символами $\delta_\lambda^s(q)$ и $\sigma_\lambda^s(q)$. В отсутствие особого состояния рассеяния сечение $\sigma_\lambda(q)$ определяем формулой (10).

Исследуем особый случай $2\lambda=-1$. Согласно представлению (16) только в этом случае функция $y_\lambda^+(q;ip)$ равна функции $(2/\pi)\ln(q/p)$ и поэтому сечение $\sigma_\lambda^s(q)$ имеет асимптотику

$$\sigma_\lambda^s(q) \sim \frac{4\pi^2}{q}\frac{1}{[2\,\ln(q/p)]^2+\pi^2}, \quad q/p \to 0. \tag{18}$$

Сравним ее с асимптотикой (11) сечения $\sigma_\lambda(q)$ в отсутствие особого состояния рассеяния. Если $q<p$, то $|\ln(q/p)| < |\ln(q/q_0)|$ и поэтому $\sigma_\lambda^s(q) > \sigma_\lambda(q)$ при $q<p$. Выявим особенности поведения фазы $\delta_\lambda^s(q)$, $2\lambda=-1$. В силу соотношения (16)

$$\partial_q\delta_\lambda^s(q) \approx -\left(\frac{2}{\pi q} + q r_{\text{eff}}\right)[\sin\,\delta_\lambda^s(q)]^2\,, \quad q \ll q_0.$$

Следовательно, если $r_{\text{eff}}>0$, то производная $\partial_q\delta_\lambda^s(q)$ отрицательна и велика по модулю, поэтому при $q/p\to 0$ фаза $\delta_\lambda^s(q)$ монотонно и быстро убывает как $(\pi/2)/\ln(q/p)$. При условии $r_{\text{eff}} \ll -2/(\pi q_0^2)$ эта производная обращается в нуль в точке $q=p_0\equiv\sqrt{-2/(\pi r_{\text{eff}})} \ll q_0$, поэтому в той же точке фаза $\delta_\lambda^s(q)$ имеет локальный минимум.

Рассмотрим следующий особый случай $2\lambda=1$. В силу представления (17) только в этом случае функция $y_\lambda^-(q;ip)$ равна функции $(2/\pi)\ln(q/p)$ и поэтому для сечения $\sigma^b_\lambda(q)$ верно приближение

$$\sigma^s_\lambda(q) \approx \frac{8(\pi a)^2 q^3}{\left[2a\, q^2\, \ln{(q/p)} - \pi\,(1 - q^2/p^2)\,\right]^2 + (a\pi q^2)^2}, \quad q \ll q_0. \tag{19}$$

Сравнив его с приближением (10) сечения $\sigma_\lambda(q)$, заключаем, что неравенство $|\ln{(q/p)}| < |\ln{(q/q_0)}|$, $q < p$, порождает соотношение $\sigma^s_\lambda(q) > \sigma_\lambda(q)$, $q < p$. Обсудим особенности поведения фазы $\delta^s_\lambda(q)$, $2\lambda = 1$. Вследствие соотношения (17)

$$\partial_q \delta^s_\lambda(q) \approx -\frac{2}{q}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{aq^2}\right)\left[\sin\,\delta^s_\lambda(q)\right]^2, \quad q \ll q_0.$$

Следовательно, если $a > 0$, то производная $\partial_q \delta^s_\lambda$ отрицательна и по порядку величины равна $O(-aq)$, поэтому при $q/p \to 0$ фаза $\delta^s_\lambda(q)$ монотонно убывает как $O(-aq^2)$. При условии $a \ll -\pi/q_0^2$ производная $\partial_q \delta^s_\lambda(q)$ равна нулю в точке $q = p_0 \equiv \sqrt{-\pi/a} \ll q_0$, поэтому в этой точке фаза $\delta^s_\lambda(q)$ имеет локальный максимум.

Отметим, что в силу представления (17) фаза $\delta^s_\lambda(q)$, $2\lambda \geqslant 3$, имеет один локальный максимум или минимум, если $a > 0$ или $a < 0$.

Теперь предположим, что при данном значении λ уравнение (12) имеет два корня p_1 и p_2, такие, что $p_1 < p_2$. Тогда существуют два особых состояния рассеяния $|p_1, \lambda\rangle$ и $|p_2, \lambda\rangle$ с энергиями $E_j = p_j^2$ и фазами $\delta_\lambda(p_j)$, $j = 1, 2$, кратными числу $\pi/2$. Выведем приближенное представление функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)$ для состояния рассеяния $|q, \lambda\rangle$ через его энергию $E = q^2$, энергии E_1, E_2 и константу $E_0 \equiv q_0^2$. Для этого в уравнении (12) положим сначала $p = p_1$, а затем $p = p_2$. Два выведенных таким способом соотношения считаем системой уравнений относительно неизвестных a и $r_{\rm eff}$. Решив эту систему, получим представления коэффициентов a и $r_{\rm eff}$ в виде функций двух аргументов p_1 и p_2:

$$\begin{aligned} a &= (p_2^2 - p_1^2)/\left[\,p_1^{2\lambda+1}\,p_2^2\,h(p_1) - p_2^{2\lambda+1}\,p_1^2\,h(p_2)\,\right], \\ r_{\rm eff} &= 2\,\left[p_1^{2\lambda+1}\,h(p_1) - p_2^{2\lambda+1}\,h(p_2)\right]/(p_2^2 - p_1^2). \end{aligned} \tag{20}$$

Затем в приближении (9) заменим длину рассеяния a и эффективный радиус $r_{\rm eff}$ такими функциями. В итоге получим искомое представление

$$\operatorname{ctg}\delta^s_\lambda(q) \approx \frac{1}{\pi}\,\ln\left(\frac{E}{E_0}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1,2}(-1)^j\,\left(\frac{E_j}{E}\right)^{\lambda+1/2}\,\frac{E + E_j}{E_1 - E_2}\,\ln\left(\frac{E_j}{E_0}\right). \tag{21}$$

Перечислим физически интересные следствия приближений (16), (17) и (21), порождаемые наличием двух особых состояний рассеяния.

В силу этих приближений функция $\operatorname{ctg}\delta^s_\lambda(q)$ ограниченна, если $0 < q \ll q_0$. Поэтому при том же условии фаза $\delta^s_\lambda(q)$ не может быть нулем или числом, кратным π. Следовательно, в точках $q = p_1$ и $q = p_2$ эта фаза принимает одинаковые значения, кратные числу $\pi/2$, а на интервале (p_1, p_2) имеет по крайней мере один локальный экстремум. Если $2\lambda = -1$, $a < 0$ и $r_{\rm eff} < 0$, то фаза $\delta^s_\lambda(q)$ равна $\pi/2$ при $q = p_1$, p_2 и имеет локальный минимум в точке $q = p_0 \equiv \sqrt{-2/(\pi r_{\rm eff})} \in (p_1, p_2)$. В случае $2\lambda = 1$, $a < 0$ фаза $\delta^s_\lambda(q)$ равна $-\pi/2$ при $q = p_1, p_2$ и имеет локальный максимум в точке $q = p_0 = \sqrt{-\pi/a} \in (p_1, p_2)$. В оставшемся случае $2\lambda \geqslant 3$ при $a < 0$ фаза $\delta^s_\lambda(q)$ равна $-\pi/2$ в точках $q = p_1$, p_2 и имеет локальный максимум, если же $a > 0$, то фаза $\delta^s_\lambda(q)$ равна $\pi/2$ в точках $q = p_1$, p_2 и имеет локальный минимум.

Так как в точках $q = p_1$ и $q = p_2$ фаза $\operatorname{ctg}\delta^s_\lambda(q)$ одинакова и кратна числу $\pi/2$, а в некоторой точке $p_0 \in (p_1, p_2)$ достигает своего локального экстремума, то отвечающее ей сечение $\sigma^s_\lambda(q)$ равно унитарному пределу $\sigma^u_\lambda(q)$ на концах отрезка $[p_1, p_2]$, а в точке p_0 имеет локальный минимум. При увеличении λ глубина этого минимума увеличивается, потому что в этом случае второе слагаемое в представлении (16) функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)$ быстро возрастает в точке $q = p_0$.

Стоит пояснить и проиллюстрировать практические приложения полученных представлений (20) и (21). Предположим, что при данном квантовом числе λ значения волновых чисел p_1, p_2 или энергий E_1 и E_2 двух особых состояний рассеяния известны. Тогда, используя представление (21), можно экстраполировать фазу и сечение рассеяния в состоянии $|q, \lambda\rangle$ в область энергий $E \ll E_0 = q_0^2$. При том же предположении нетрудно сначала вычислить длину рассеяния и эффективный радиус по формулам (20), а затем численно исследовать уравнение (12) на наличие третьего корня p_3 и найти модуль p_b волнового числа слабосвязанного состояния $|ip_b, \lambda\rangle$ как корень $p_b = p$ уравнения (13).

Приведем вычисленные таким способом значения корней p_3 и p_b в случае $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$. Корень p_3 существует при условии $2\lambda = 3,\ 5$: если $2\lambda = 3$, то $p_3 = 1{,}039506\ldots$, если $2\lambda = 5$, то $p_3 = 1{,}120375\ldots$ При условии $2\lambda \leqslant 3$ имеется один корень: $p_b = 0{,}070716\ldots$, если $2\lambda = -1$; $p_b = 0{,}282842\ldots$, если $2\lambda = 1$, и $p_b = 1{,}191663\ldots$, если $2\lambda = 3$. В случае $2\lambda = 5$ существуют два корня: $p_b = 0{,}227009$ и $p_b = 1{,}120336\ldots$ При тех же значениях $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$ зависимость сечения $\sigma^s_\lambda(q)$, вычисленного в приближении (21), от квантовых чисел q и λ поясняет рис. 1. Как видно, сечение $\sigma^s_\lambda(q)$ близко к своему унитарному пределу $\sigma^u_\lambda(q)$ на всем интервале (p_1, p_2), если $2\lambda = -1$, а с ростом λ минимальное значение сечения $\sigma^s_\lambda(q)$ на этом интервале быстро уменьшается. В области $q > p_2$ сечения $\sigma^s_\lambda(q)$, $2\lambda = 3,\ 5$, близки к унитарному пределу, потому что при выбранных значениях $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$ корней уравнения (12) это уравнение имеет еще один корень p_3, близкий к единице.

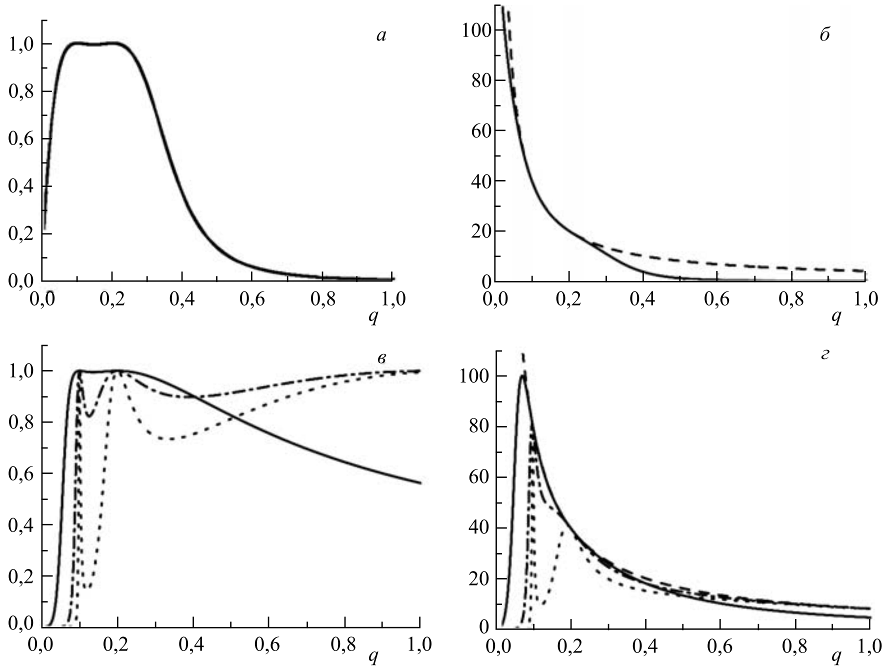

Рис. 1. Зависимость сечения $\sigma_\lambda^s(q)$ от квантовых чисел q и λ при наличии особых состояний рассеяния $|p_1, \lambda\rangle$, $p_1 = 0{,}1$, и $|p_2, \lambda\rangle$, $p_2 = 0{,}2$; унитарный предел $\sigma_\lambda^u(q)$ — штриховая кривая; *а*) отношение $\sigma_\lambda^s(q)/\sigma_\lambda^u(q)$, $2\lambda = -1$; *б*) сечение $\sigma_\lambda^s(q)$, $2\lambda = -1$, — сплошная кривая; *в*) отношения $\sigma_\lambda^s(q)/\sigma_\lambda^u(q)$ при $2\lambda = 1, 3, 5$ — сплошная, штрихпунктирная и пунктирная кривые соответственно; *г*) сечения $\sigma_\lambda^s(q)$ при $2\lambda = 1, 3, 5$ — сплошная, штрихпунктирная и пунктирная кривые соответственно

2.2. Рассеяние при наличии слабосвязанного состояния. Выявим особенности фаз $\delta_\lambda(q)$ и сечений $\sigma_\lambda(q)$ упругого рассеяния квантовой частицы, отличные от указанных выше, но порождаемые ее слабосвязанными состояниями. Предположим, что значения λ, a и r_{eff} заданы и при таких значениях уравнение (13) имеет один корень p, но на полуинтервале $(0, p+\epsilon]$, $\epsilon/p \ll 1$, уравнение (12) не имеет решений, а система уравнений (14) и (15) несовместна. Тогда имеется одно слабосвязанное состояние $|ip, \lambda\rangle$, но отсутствуют особое состояние рассеяния и резонансное состояние, модули волновых чисел которых меньше или равны числу $p+\epsilon$. Поэтому при $q \in (0, p+\epsilon]$ фаза $\delta_\lambda(q)$ состояния рассеяния $|q, \lambda\rangle$ не кратна числу $\pi/2$.

Исследуем поведение этой фазы и соответствующего ей сечения. Для этого используем представление (9) функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)$ через параметры a и r_{eff}. Так как p — корень уравнения (13), то из этого представления можно исключить a или $r_{\rm eff}$. В результате получится приближение функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)$ через параметры $r_{\rm eff}$ и p:

$$\begin{gathered}\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)\approx y_\lambda^+(q;ip)+\frac{r_{\rm eff}}{2}\frac{q^2+p^2}{q^{2\lambda+1}},\\ y_\lambda^+(q;ip)\equiv h(q)-\left(\frac{ip}{q}\right)^{2\lambda+1}h(p),\quad q\ll q_0,\end{gathered}\tag{22}$$

или приближение этой же функции, но через параметры a и p:

$$\begin{gathered}\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q)\approx y_\lambda^-(q;ip)-\frac{1}{ap^2}\frac{q^2+p^2}{q^{2\lambda+1}},\\ y_\lambda^-(q;ip)\equiv h(q)-\left(\frac{ip}{q}\right)^{2\lambda-1}h(p),\quad q\ll q_0.\end{gathered}\tag{23}$$

Соответствующее таким приближениям сечение (4) обозначим символом $\sigma_\lambda^b(q)$. Примем обозначения $a_b\equiv a$, $r_b\equiv r_{\rm eff}$ и $\delta_\lambda^b(q)\equiv\delta_\lambda(q)$. В отсутствие слабосвязанного состояния используем прежние обозначения a, $r_{\rm eff}$, $\delta_\lambda(q)$, а сечение $\sigma_\lambda(q)$ определим формулой (10). Заметим, что верны оба неравенства $a_b\neq a$, $r_b\neq r_{\rm eff}$ или по крайней мере одно из них.

Предположим, что число $2\lambda+1$ кратно четырем. Используем представления (22).

Случай $2\lambda=-1$ — исключительный: только в этом случае функция $y_\lambda^+(q;ip)$ равна функции $(2/\pi)\ln(q/p)$ и поэтому сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ имеет асимптотику

$$\sigma_\lambda^b(q)\sim\frac{4\pi^2}{q}\,\frac{1}{\left[2\,\ln(q/p)\right]^2+\pi^2}=\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{4\pi^2}{\left[\ln(E/B)\right]^2+\pi^2},\quad q/p\to 0.\tag{24}$$

Сравним ее с асимптотикой (11) сечения $\sigma_\lambda(q)$ в отсутствие слабосвязанного состояния. Если $q<p$, то $|\ln(q/p)|<|\ln(q/q_0)|$, и поэтому $\sigma_\lambda^b(q)>\sigma_\lambda(q)$ при $q<p$.

Перечислим особенности поведения фазы $\delta_\lambda^b(q)$, $2\lambda=-1$, порожденные представлением (22). Если $r_b>0$, то производная $\partial_q\delta_\lambda^b(q)$ отрицательна и велика по модулю, поэтому при $q/p\to 0$ фаза $\delta_\lambda(q)$ монотонно и быстро убывает как $(\pi/2)\ln(q/p)$. При условии $r_b\ll -2/(\pi q_0^2)$ обсуждаемая производная обращается в нуль в точке $q=\sqrt{2/(\pi r_b)}\ll q_0$, поэтому в той же точке фаза $\delta_\lambda^b(q)$ имеет локальный минимум.

Отметим, что из приближения (22), $2\lambda=-1$, следует менее точное приближение

$$\operatorname{ctg}\delta_\lambda^b(q)\approx(1/\pi)\,\ln(E/B),\quad\lambda=-1/2,\quad E/B\to 0,$$

которое впервые получено в работе [37] и использовалось в недавних работах [38, 39], по-видимому, из-за незнания более лучшего.

Если $2\lambda = 3, 7, \ldots$, то согласно формулам (22) в малой ϵ-окрестности $(p-\epsilon, p+\epsilon)$, $\epsilon \ll p$, точки p функция $y^+_\lambda(q; ip)$ близка к функции $(2/\pi)\ln(q/p)$ и равна нулю в точке $q = p$, как и в рассмотренном выше случае $2\lambda = -1$. Поэтому в точке $q = p$

$$\operatorname{ctg}\delta^b_\lambda(q) \approx p^{1-2\lambda}\, r_b, \quad \sigma^b_\lambda(q) \approx (2 - \delta_{2\lambda,-1})\frac{4p^{4\lambda-3}}{p^{4\lambda-2} + r_b^2}, \quad 2\lambda = -1, 3, 7, \ldots \tag{25}$$

Если $|r_b| \ll p^{2\lambda-1}$, то в этой точке значение фазы $\delta^b_\lambda(q)$ близко к числу, кратному $\pi/2$, а сечение $\sigma^b_\lambda(q)$ по порядку величины равно $O(1/p)$ и поэтому довольно велико. Сравним такое сечение $\sigma^b_\lambda(p)$ с сечением $\sigma_\lambda(q)$ при условии $2\lambda = 3, 7, \ldots$ По формуле (10) находим $\sigma_\lambda(q) \approx 8\, a^2 p^{4\lambda+1}$. Следовательно, отношение $\sigma^b_\lambda(p)/\sigma_\lambda(p)$ по порядку величины равно $O(1/p^{4\lambda+2})$ и поэтому велико и возрастает при увеличении числа λ.

Предположим, что число $2\lambda + 1$ не кратно четырем. Используем формулы (23).

Случай $2\lambda = 1$ — особый: только в этом случае функция $y^-_\lambda(q; ip)$ равна функции $(2/\pi)\ln(q/p)$ и поэтому для сечения $\sigma^b_\lambda(q)$ верно приближение

$$\sigma^b_\lambda(q) \approx \frac{8(\pi a_b)^2\, q^3}{\left[\, 2a_b\, q^2\, \ln(q/p) - \pi\,(1 + q^2/p^2)\,\right]^2 + (a_b \pi q^2)^2}, \quad q \ll q_0. \tag{26}$$

Сравнив его с приближением (10) сечения $\sigma_\lambda(q)$, заключаем, что неравенство $|\ln(q/p)| < |\ln(q/q_0)|$, $q < p$, порождает соотношение $\sigma^b_\lambda(q) > \sigma_\lambda(q)$, $q < p$.

Обсудим особенности поведения фазы $\delta^b_\lambda(q)$, $2\lambda = 1$, обусловленные приближением (23). Если $a_b > 0$, то производная $\partial_q \delta^b_\lambda$ отрицательна и по порядку величины равна $O(-a_b q)$, поэтому фаза $\delta^b_\lambda(q)$ монотонно убывает как $O(-a_b q^2)$. При условии $a_b \ll -\pi/q_0^2$ производная $\partial_q \delta^b_\lambda(q)$ равна нулю в точке $q = \sqrt{-\pi/a_b} \ll q_0$, поэтому в этой точке фаза $\delta^b_\lambda(q)$ имеет локальный максимум.

Пусть $2\lambda = 5, 9, \ldots$ Тогда согласно равенствам (22) в малой ϵ-окрестности $(p-\epsilon, p+\epsilon)$, $\epsilon \ll p$, точки p функция $y^+_\lambda(q; ip)$ близка к функции $(2/\pi)\ln(q/p)$ и равна нулю в точке $q = p$, как и в исследованном выше случае $2\lambda = 1$. Поэтому в точке $q = p$

$$\operatorname{ctg}\delta^b_\lambda(q) \approx -\frac{2}{a_b}\, p^{-2\lambda-1}, \quad \sigma^b_\lambda(q) \approx 8\, \frac{a_b^2 p^{4\lambda+1}}{a_b^2 p^{4\lambda+2} + 4}, \quad 2\lambda = 1, 5, 9, \ldots \tag{27}$$

Если $|a_b| \gg 2/p^{2\lambda+1}$, то в этой точке значение фазы $\delta^b_\lambda(q)$ близко к числу, кратному $\pi/2$, а сечение $\sigma^b_\lambda(q)$ по порядку величины равно $O(1/p)$ и поэтому довольно велико. Сравним такое сечение $\sigma^b_\lambda(p)$ с сечением $\sigma_\lambda(q)$ при условии $2\lambda = 5, 9, \ldots$ По формуле (10) находим $\sigma_\lambda(q) \approx 8\, a^2 p^{4\lambda+1}$. Следовательно, отношение $\sigma^b_\lambda(p)/\sigma_\lambda(p)$ по порядку величины равно $O(1/p^{4\lambda+2})$ и поэтому велико и возрастает при увеличении числа λ.

Теперь предположим, что при данном значении λ уравнение (13) имеет два корня p_1 и p_2, отличные от корней уравнения (12). Тогда существуют два слабосвязанных состояния $|ip_1, \lambda\rangle$ и $|ip_2, \lambda\rangle$ с энергиями связи $B_j = p_j^2$, $j = 1, 2$. Выведем приближенное представление функции $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q)$ для состояния рассеяния $|q, \lambda\rangle$ через его энергию $E = q^2$, энергии связи B_1, B_2 и константу $E_0 \equiv q_0^2$. Для этого в уравнении (13) положим сначала $p = p_1$, а затем $p = p_2$. Два полученных таким образом соотношения считаем системой уравнений относительно неизвестных коэффициентов a и r_{eff}. Решив эту систему, выведем представления этих коэффициентов как функций двух аргументов p_1 и p_2:

$$\begin{aligned} a_b &= (p_2^2 - p_1^2) / \left[(ip_1)^{2\lambda+1}\, p_2^2\, h(p_1) - (ip_2)^{2\lambda+1}\, p_1^2\, h(p_2) \right], \\ r_b &= 2 \left[(ip_1)^{2\lambda+1}\, h(p_1) - (ip_2)^{2\lambda+1}\, h(p_2) \right] / (p_2^2 - p_1^2). \end{aligned} \tag{28}$$

Затем в приближении (9) заменим длину рассеяния a и эффективный радиус r_{eff} такими функциями. В итоге получим искомое представление

$$\operatorname{ctg} \delta_\lambda^b(q) \approx \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{E}{E_0}\right) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1,2} i^{2(\lambda+j)+1} \left(\frac{B_j}{E}\right)^{\lambda+1/2} \frac{E + B_j}{B_2 - B_1} \ln\left(\frac{B_j}{E_0}\right). \tag{29}$$

Сформулируем основные результаты выполненного выше анализа фаз и сечений. При любых значениях длин рассеяния a_b, a и эффективных радиусов r_b, r_{eff} в области $q < p$ сечение $\sigma_\lambda^b(q)$, $2\lambda = \pm 1$, околопорогового рассеяния при наличии слабосвязанного состояния $|ip, \lambda\rangle$ заметно превышает сечение рассеяния $\sigma_\lambda(q)$ в отсутствие такого состояния. Этот же вывод остается справедливым в случае $2\lambda = 3, 7, \ldots$ или в случае $2\lambda = 5, 9, \ldots$ при соответствующем дополнительном условии $|r_b| \ll p^{2\lambda-1}$ или $|a_b| \gg 2/p^{2\lambda+1}$. Согласно работе [36] такие условия являются достаточными для существования слабосвязанного состояния, но, как показано выше, из всех таких состояний эти условия выделяют состояния, при наличии которых сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ обладает особым свойством: $\sigma_\lambda^b(q) = O(1/p)$, если $q = p$.

Поясним прикладное значение формул (25)–(29).

Используя формулы (25)–(27), можно решить две задачи: найти значения длины рассеяния a_b и эффективного радиуса r_b по измеренным значениям энергии связи $B = p^2$ слабосвязанного состояния $|ip, \lambda\rangle$ и сечения рассеяния $\sigma_\lambda^b(p)$ при энергии $E = B$, либо предсказать оценки величин B и $\sigma_\lambda^b(p)$, используя предварительно вычисленные значения a_b и r_b.

Предположим, что имеются два слабосвязанных состояния и известны модули p_1, p_2 их волновых чисел или же энергии связи B_1 и B_2. Тогда, используя представление (29), можно экстраполировать фазу $\delta_\lambda^b(p)$ и сечение $\sigma_\lambda^b(p)$ рассеяния в состоянии $|q, \lambda\rangle$ в область околопороговых значений энергий $E \ll E_0 = q_0^2$. При том же предположении несложно сначала вычислить длину рассеяния и эффективный радиус по формулам (28), а затем исследовать уравнение (13) на наличие третьего корня p_3 и найти волновое число p_s особого состояния рассеяния $|p_s, \lambda\rangle$ как корень $p_s = p$ уравнения (12).

Приведем вычисленные таким способом значения корней p_3 и p_s в случае $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$. Корень p_3 существует при условии $2\lambda \geqslant 3$ и близок к единице: $p_3 = 1{,}039506\ldots$, если $2\lambda = 3$, и $p_3 = 1{,}120375\ldots$, если $2\lambda = 5$. При условии $2\lambda \leqslant 3$ имеется один корень: $p_s = 0{,}070716\ldots$, если $2\lambda = -1$; $p_s = 0{,}282842\ldots$, если $2\lambda = 1$, и $p_s = 1{,}191663\ldots$, если $2\lambda = 3$. В случае $2\lambda = 5$ число корней равно двум, а их значения таковы: $p_s = 0{,}227100\ldots$ и $p_s = 1{,}120336\ldots$ При тех же значениях ($p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$) зависимость сечения $\sigma_\lambda^b(q)$, вычисленного в приближении (29), от квантовых чисел q и λ поясняет рис. 2. Видно, что сечение $\sigma_\lambda^b(q)$ не имеет особенностей при волновом числе q, равном модулю p_1 или p_2 первого или второго слабосвязанных

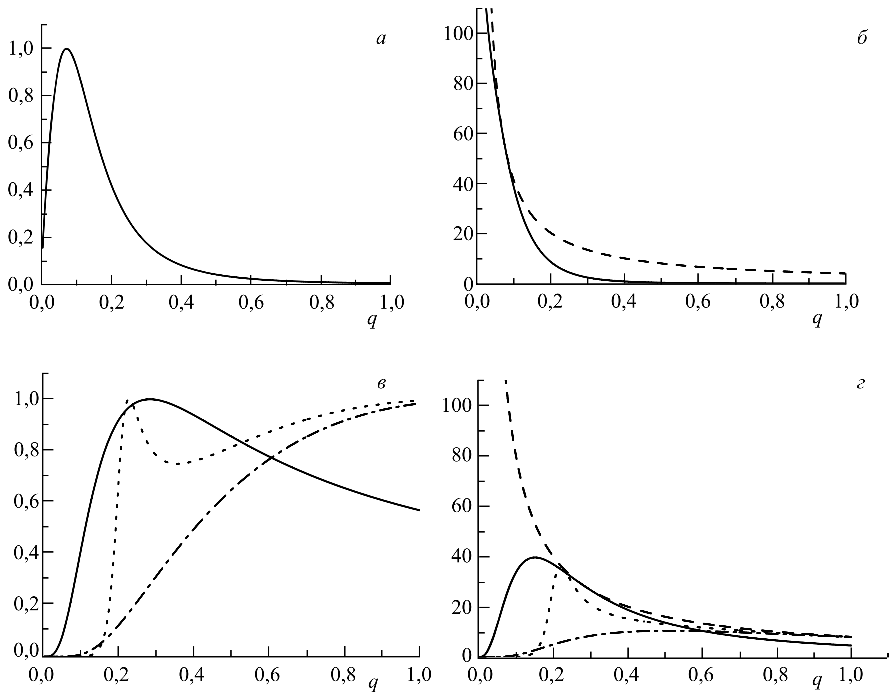

Рис. 2. Зависимость сечения $\sigma_\lambda^b(q)$ от квантовых чисел q и λ при наличии слабосвязанных состояний $|ip_1, \lambda\rangle$, $p_1 = 0{,}1$, и $|ip_2, \lambda\rangle$, $p_2 = 0{,}2$; унитарный предел $\sigma_\lambda^u(q)$ — штриховая кривая; *а*) отношение $\sigma_\lambda^b(q)/\sigma_\lambda^u(q)$, $2\lambda = -1$; *б*) сечение σ_λ^b, $2\lambda = -1$ — сплошная кривая; *в*) отношения $\sigma_\lambda^b(q)/\sigma_\lambda^u(q)$ при $2\lambda = 1, 3, 5$ — сплошная, штрихпунктирная и пунктирная кривые соответственно; *г*) сечения $\sigma_\lambda^b(q)$ при $2\lambda = 1, 3, 5$ — сплошная, штрихпунктирная и пунктирная кривые соответственно

состояний, и близко к своему унитарному пределу $\sigma^u_\lambda(q)$ только в малой окрестности вполне определенного волнового числа q, совпадающего с волновым числом p_s соответствующего особого состояния рассеяния.

2.3. Резонансное рассеяние. Приступим к анализу фазы $\delta_\lambda(q)$ и сечения $\sigma_\lambda(q)$ околопорогового упругого рассеяния в состоянии $|q,\lambda\rangle$, при наличии околопорогового резонансного состояния $|q_r,\lambda\rangle$.

Предположим, что значения λ, a и $r_{\rm eff}$ заданы и при таких значениях система уравнений (14) и (15) имеет единственное решение решение (p,ω), но уравнения (13) и (12) не имеют корней, по крайней мере на полуинтервале $(0,p+\epsilon]$, $\epsilon/p\ll 1$. При таких предположениях квантовая частица имеет одно околопороговое резонансное состояние $|(p,\omega),\lambda\rangle$, но модули волновых чисел ее особых состояний рассеяния и слабосвязанных состояний превышают число $p+\epsilon$.

Заметим, что из системы уравнений (14) и (15) следуют равенства

$$a=-p^{-2\lambda-1}\,(\sin 2\omega)/\left\{[1+(2/\pi)\,\omega]\,\cos{(2\lambda-1)\omega}+h(p)\,\sin{(2\lambda-1)\omega)}\right\}, \tag{30}$$
$$r_{\rm eff}=-2p^{2\lambda-1}\,(\mathrm{cosec}\,2\omega)\,\left\{[1+(2/\pi)\,\omega]\,\cos{(2\lambda+1)\omega}+h(p)\,\sin{(2\lambda+1)\omega}\right\}.$$

Поэтому приближение (9) функции $\mathrm{ctg}\,\delta_\lambda(q)$ можно представить через координаты p и ω волнового числа q_r резонансного состояния $|q_r,\lambda\rangle$. Используя функцию

$$\eta(\omega)\equiv(\pi+2\omega)/\sin 2\omega,$$

запишем это представление в виде трех соотношений:

$$\mathrm{ctg}\,\delta_\lambda(q;p,\omega)\approx h(q)-h(p)\,z^+_\lambda(q)-z^-_\lambda(q); \tag{31}$$
$$z^+_\lambda(q)\equiv(p/q)^{2\lambda+1}\,(\mathrm{cosec}\,2\omega)\,\left\{\left[\,(q/p)^2-1\right]\,\sin{(2\lambda+1)\omega}+2\sin\,\omega\,\cos\,2\lambda\omega\right\},$$
$$z^-_\lambda(q)\equiv(p/q)^{2\lambda+1}\,\eta(\omega)\,\left\{[(q/p)^2-1]\,\cos{(2\lambda+1)\omega}-2\sin\,\omega\,\sin\,2\lambda\omega]\right\}/(2\pi).$$

Эти соотношения позволяют определить, имеет ли фаза рассеяния $\delta_\lambda(q;p,\omega)$ значения, кратные числу $\pi/2$, или локальные экстремумы, порожденные наличием резонансного состояния. При любом заданном значении λ решение такой задачи сводится к численному анализу простых и кратных корней уравнения $\mathrm{ctg}\,\delta_\lambda(q;p,\omega)=0$ как функций полярных координат p и ω резонансного состояния.

Для примера найдем кратный корень такого уравнения в случае $2\lambda\pm 1$. Заметим, что только в этом случае функция $z^+_\lambda(q)$ тождественно равна единице. Поэтому первая из формул (31) существенно упрощается и принимает вид

$$\mathrm{ctg}\,\delta_\lambda(q;p,\omega)\approx(1/\pi)\left\{2\,\ln{(q/p)}+i^{2\lambda+1}\eta(\omega)\left[\cos\,2\omega-(p/q)^{4\lambda}\right]\right\}, \tag{32}$$

следовательно, сечение (4) в обозначениях (6) аппроксимируется формулой

$$\sigma_\lambda(q;p,\omega) \approx$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{4\pi^2\,(2-\delta_{2\lambda,-1})}{\left\{\ln\,(E/E_r) + \,i^{2\lambda+1}\eta(\omega)\,[\cos\,2\omega - (E_r/E)^{2\lambda}]\right\}^2 + \pi^2}, \quad (33)$$

а для уравнения $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q;p,\omega) = 0$ эталонным является довольно простое уравнение

$$2\,\ln\,(q/p) = i^{2\lambda+1}\eta(\omega)[(p/q)^{4\lambda} - \cos\,2\omega].$$

Это уравнение имеет кратный корень $q = q_\lambda \equiv p[2\eta(\omega)]^\lambda$ тогда и только тогда, когда угол ω равен корню ω_t уравнения

$$\ln\,[\eta(\omega)] = \eta(\omega)\,\cos\,2\omega - 1.$$

Существует лишь один такой корень: $\omega = \omega_t = 0{,}480189\ldots$ Следовательно, все резонансные состояния $|(p,\omega),\pm 1/2\rangle$ с любым значением координаты $p \ll q_0$, но с углом $\omega = \omega_t$ являются особыми в следующем смысле: при наличии любого такого состояния фаза рассеяния $\delta_\lambda(q;p,\omega_t)$ в состояния рассеяния $|q,\pm 1/2\rangle$ имеет локальный экстремум в точке $q = q_\lambda = p\,[\eta(\omega_t)]^\lambda$: минимум или максимум, если $2\lambda = -1$ или $2\lambda = 1$. Так как $\eta(\omega_t) = 2{,}140908\ldots > 1$, то $q_\lambda < p$ при $2\lambda = -1$ и $q_{\lambda t} > p$, если $2\lambda = 1$. В точке $q = q_\lambda$ равны нулю и функция $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q;p,\omega_t)$, и ее первая производная, а вторая производная принимает значение $2(2-\delta_{2\lambda,-1})/(\pi q_\lambda^2)$. Поэтому в ϵ-окрестности $(q_\lambda - \epsilon, q_\lambda + \epsilon)$, $0 < \epsilon < p$, точки $q = q_\lambda$ верно приближение функции $\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q;p,\omega_t)$, $2\lambda = \pm 1$, подсуммой ее ряда Тейлора с двумя нулевыми слагаемыми и третьим слагаемым, отличным от нуля:

$$\operatorname{ctg}\delta_\lambda(q;p,\omega_t) \approx \partial_q^2 \operatorname{ctg}\delta_\lambda(q;p,\omega_t)|_{q=q_\lambda}\,(q-q_\lambda)^2/2 = [2-\delta_{2\lambda,-1}/\pi](q/q_\lambda - 1)^2.$$

Соответствующее сечение (4), $2\lambda = \pm 1$, в обозначениях $E = q^2$ и $E_\lambda \equiv q_\lambda^2$ имеет вид

$$\sigma_\lambda(q;p,\omega_t) \approx \sigma_\lambda^t(q;q_\lambda),$$
$$\sigma_\lambda^t(q;q_\lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{4\pi^2(2-\delta_{2\lambda,-1})}{2^{2\lambda+1}\left(\sqrt{E/E_\lambda}-1\right)^4 + \pi^2}. \quad (34)$$

Это сечение обладает интересной с экспериментальной точки зрения особенностью: оно близко к своему унитарному пределу в любой точке q области $(q_\lambda - \epsilon, q_\lambda + \epsilon)$ с точностью порядка $O((q/q_0)^2 + (\epsilon/p)^3)$.

Теперь решим следующую задачу: используя представление (31), найти приближение сечения (4) в ϵ-окрестности $(q-\epsilon, q+\epsilon)$, $0 < \epsilon < p$, точки $q = p$ при условии $2|\lambda|\omega \ll 1$. В формулах (31) функции $\sin 2\omega$ и $\sin\,(2\lambda\omega)$

не аппроксимируем, все остальные тригонометрические функции заменим их разложениями в ряды Тейлора с центром в точке $\omega = 0$; если $2\lambda \neq 1$, то функцию $(q/p)^{2\lambda+1}$ аппроксимируем конечной подсуммой двух слагаемых ее ряда Тейлора с центром в точке $q = p$. В получившемся разложении функции $\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q; p, \omega)$ оставим только те слагаемые, которые неограниченно возрастают или убывают как $O(\epsilon/p)$ или $O(2|\lambda|\omega)$. Итоговое представление будет искомым приближением

$$\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q; p, \omega) \approx (2/\pi) \ln (q/p) + [1 - (q/p)^2] \operatorname{cosec} 2\omega + \sin 2\lambda\omega, \qquad (35)$$

которому в обозначениях (6) соответствует сечение

$$\sigma_\lambda(q; p, \omega) \approx \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{4\pi^2(2 - \delta_{2\lambda,-1})(\Gamma/2)^2}{[E - E_r - (\Gamma/2) \sin 2\lambda\omega]^2 + (\Gamma/2)^2}. \qquad (36)$$

Отметим, что полученные приближения (35) и (36) содержат функцию $\sin 2\lambda\omega$ и верны с абсолютной точностью порядка $O([2|\lambda|\omega + \epsilon/p]^2)$ для любого λ, но лишь при условиях $2|\lambda|\omega \ll 1$ и $|q/p - 1| < \epsilon/p < 1$.

Обсудим особенности, фазы и сечения, порожденные приближениями (35), (36) и функцией $\sin 2\lambda\omega$. Значения q_λ и E_λ волнового числа и соответствующей энергии, при которых фаза кратна числу $\pi/2$, а сечение достигает своего максимального значения, равного унитарному пределу, зависят от квантового числа λ следующим образом:

$$q_\lambda \approx p\,(1 + \sin 2\omega \, \sin 2\lambda\omega)^{1/2}, \quad E_\lambda = q_\lambda^2 \approx E_r + (\Gamma/2) \sin 2\lambda\omega.$$

Поэтому $q_\lambda < p$ и $E_\lambda < E_r$ только в случае $2\lambda = -1$; если $2\lambda \geqslant 1$, то $q_\lambda > p$ и $E_\lambda > E_r$. Физическая причина, порождающая указанные неравенства, заключается в том, что в исходном уравнении Шредингера (2) слагаемое $\lambda(\lambda + 1)/x^2$ при $\lambda = -1/2$ является притягивающим (центростремительным), а при всех остальных значениях λ — отталкивающим (центробежным) барьером.

Наша следующая задача такова: используя формулы (31), найти приближение сечения в ϵ-окрестности $(q - \epsilon, q + \epsilon)$, $0 < \epsilon < p$, точки $q = p$ при условии $|\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1$. В формулах (31) функцию $\sin 2\omega$ не аппроксимируем, все остальные тригонометрические функции заменим их разложениями в ряды Тейлора с центром в точке $\omega = \pi/2$, пренебрежем всеми слагаемыми порядка $O(|\lambda|(\pi - 2\omega) + \epsilon/p)$ и в итоге получим

$$\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q; p, \omega) \approx 2\, i^{2\lambda-1} (p/q)^{2\lambda+1} \left[(q/p)^2 + 1 \right] \operatorname{cosec} 2\omega,$$
$$|\lambda|(\pi - 2\omega) \ll 1, \quad q/p < \epsilon < 1.$$

Следовательно, при любом λ в ϵ-окрестности фаза $\delta_\lambda(q; p, \omega)$ является знакопостоянной и гладкой функцией, а соответствующее ей сечение (4) приближается формулой

$$\sigma_\lambda(q;p,\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{(2-\delta_{2\lambda,-1})\,\Gamma^2}{4\,(\,E+E_r\,)^2+(\Gamma/2)^2}, \quad |\lambda|(\pi-2\omega) \ll 1, \quad q/p<\epsilon<1, \tag{37}$$

и поэтому монотонно убывает с ростом энергии $E=q^2$.

Наглядное представление о найденных особенностях околопорогового сечения рассеяния в состояниях $|q,\pm 1/2\rangle$ при наличии резонансных состояний $|(p,\omega),\pm 1/2\rangle$ с координатой $p=0{,}2$ и разными значениями угла ω дает рис. 3. На нем сплошными кривыми изображены сечения (4) вычисленные в приближении (31). Сплошные кривые a, b и c — графики сечений при соответствующих небольших значениях угла $\omega=0{,}1,\ 0{,}2$ и $\omega=0{,}3$ — имеют острые пики и касаются штриховых кривых, изображающих соответствующие унитарные пределы $\sigma^u_\lambda(q)$, $2\lambda=\pm 1$. Как видно, абсцисса точки касания лежит справа или слева от точки $q=p=0{,}2$, если $2\lambda=-1$ или $2\lambda=1$. Сплошные кривые d — графики сечений $\sigma_\lambda(q;p,\omega)$ в особом случае $\omega=\omega_t$ —

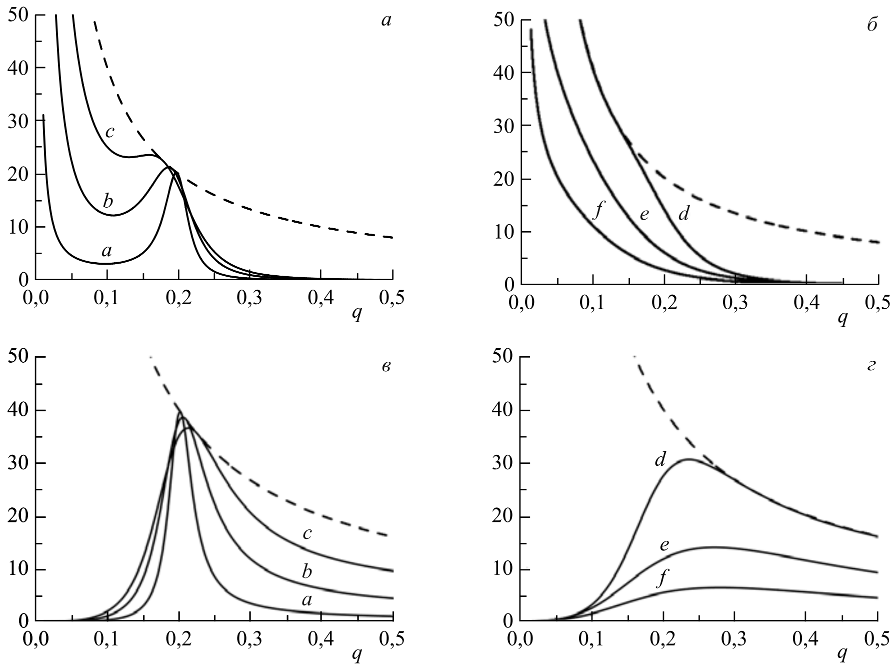

Рис. 3. Сечения резонансного рассеяния $\sigma_\lambda(q;p,\omega)$, $p=0{,}2$, в следующих случаях: *а)* $2\lambda=-1$, $\omega=0{,}1, 0{,}2, 0{,}3$ — кривые *a*, *b*, *c*; *б)* $2\lambda=-1$, $\omega=0{,}480189, 0{,}8, 1$ (кривые *d*, *e*, *f*); *в)* $2\lambda=1$, $\omega=0{,}1, 0{,}2, 0{,}3$ (кривые *a*, *b*, *c*); *г)* $2\lambda=1$, $\omega=0{,}480189, 0{,}8, 1$ (кривые *d*, *e*, *f*). Унитарные пределы $\sigma^u_\lambda(q)$, $2\lambda=\pm 1$, — штриховые кривые

близки к графикам соответствующих унитарных пределов $\sigma_\lambda^u(q)$ в области $0{,}204 < q < 0{,}14$ или $0{,}23 < q < 0{,}7$, если $2\lambda = -1$ или $2\lambda = 1$. В масштабе обсуждаемого рисунка перегибы сплошных кривых e и f, изображающих сечения $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$, при довольно больших значениях угла $\omega = 0{,}8$ и $\omega = 1$ незаметны. Поясненные особенности кривых d; a, b, c и e, f подтверждают справедливость соответствующих приближений (34); (36) и (37).

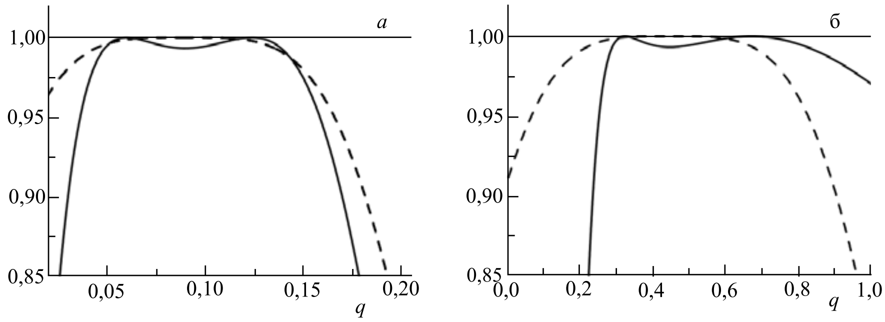

Рис. 4. График функции $f(q) \equiv 1$ — сплошная прямая; графики отношений $\sigma_\lambda(q; p, \omega_t)/\sigma_\lambda^u(q)$ и $\sigma_\lambda^t(q; q_\lambda)/\sigma_\lambda^u(q)$ при $p = 0{,}2$ — сплошные и штриховые кривые: *а*) $2\lambda = -1$, *б*) $2\lambda = 1$

Более подробную информацию о поведении сечений $\sigma_\lambda(q; p, \omega)$, $2\lambda = \pm 1$, в особом случае $\omega = \omega_t$ можно извлечь из рис. 4. На нем изображены графики отношений сечений $\sigma_\lambda(q; p, \omega_t)$ и $\sigma_\lambda^t(q; p, \omega_t)$ к унитарному пределу $\sigma_\lambda^u(q)$, вычисленные при $2\lambda = \pm 1$ и $p = 0{,}2$ по формулам (4), (31) и (34), в которых $q_\lambda = 0{,}096653\ldots < p$, если $2\lambda = -1$, и $q_\lambda = 0{,}413851\ldots > p$, если $2\lambda = 1$. Равенство $\sigma_\lambda(q; p, \omega) = \sigma_\lambda^u(q)$ в случае $2\lambda = -1$ выполняется при следующих значениях $q_\pm$ волнового числа q: если $2\lambda = -1$, то $q_- \approx 0{,}06$, а $q_+ \approx 0{,}12$; если $2\lambda = 1$, то $q_- \approx 0{,}32$, а $q_+ \approx 0{,}68$. Согласно рис. 4 приближение $\sigma_\lambda(q) \approx \sigma_\lambda^t(q)$ верно в области $q_- < q < q_+$, но неприменимо при малых $(q < q_-)$ или больших $(q > q_+)$ значения волнового числа q.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты настоящей работы. В рамках приближения эффективного радиуса впервые удалось выявить и исследовать низкоэнергетические особенности всех $(\lambda = -1/2, 1/2, \ldots)$ парциальных фаз и сечений двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом произвольной формы. В результате выполненных исследований получены удобные для практических приложений низкоэнергетические приближения парциальных фаз и сечений (16)–(37) упругого рассеяния при наличии особых состояний рассеяния, слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний.

Выполненные в настоящей работе исследования представляются актуальными в связи с бурным развитием теоретической и экспериментальной физики ультрахолодных атомарных и молекулярных газов в магнитооптических ловушках [40]. Во многих из таких ловушек движение частиц газа можно с хорошей точностью считать двумерным. Для численного и качественного анализа двумерного столкновения двух частиц такого газа предлагается использовать полученные в настоящей работе низкоэнергетические аппроксимации (16)–(37).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). Т. 3. 6-е изд., испр. М.: Физматлит, 2004.
2. *Тейлор Дж.* Теория рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
3. *Калоджеро Ф.* Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
4. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
5. *Bethe H. A.* // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 38.
6. *Друкарев Г. Ф.* // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 537.
7. *Rakityansky S. A., Elander N.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. P. 225302.
8. *Пупышев В. В.* Рассеяние медленной квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом. Препринт ОИЯИ Р4-2012-101. Дубна, 2012.
9. *Пупышев В. В.* // ЯФ. 2013. Т. 76. С. 199.
10. *Ландау Л. Д., Смородинский Я. А.* // ЖЭТФ. 1944. Т. 14. С. 269.
11. *Пупышев В. В., Соловцова О. П.* // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27. С. 859.
12. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. С. 1457.
13. *Блохинцев Л. Д., Борбей И., Долинский Э. И.* // ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. С. 1189.
14. *Блохинцев Л. Д., Еременко В. О.* // ЯФ. 2008. Т. 71. С. 1247.
15. *Blokhintsev L. D. et al.* // Phys. Rev. C. 1993. V. 48. P. 2390.
16. *Орлов Ю. В., Иргазиев Б. Ф., Никитина Л. И.* // ЯФ. 2010. Т. 73. С. 787.
17. *Sparenberg J. M., Capel P., Baye D.* // Phys. Rev. C. 2010. V. 81. 011601.
18. *Yarmukhamedov R., Baye D.* // Phys. Rev. C. 2011. V. 84. 024603.
19. *Блохинцев Л. Д.* // ЯФ. 2011. Т. 74. С. 1008.
20. *Блохинцев Л. Д.* // Изв. РАН, сер. физ. 2012. Т. 76. С. 481.
21. *Линхард Й.* // УФН. 1969. Т. 99. С. 249.
22. *Красовицкий П. М., Такибаев Н. Ж.* // Изв. РАН, сер. физ. 2007. Т. 70, вып. 5. С. 709.
23. *Demkov Yu. N., Meyer J. D.* // Eur. Phys. J. B. 2004. V. 42. P. 361.

24. *Чулуунбаатар О. и др.* // ЯФ. 2009. Т. 72. С. 811.
25. *Simon B.* // Ann. Phys. 1976. V. 97. P. 279.
26. *Patil S. H.* // Phys. Rev. A. 1980. V. 22. P. 2400.
27. *Lapidus I. R.* // Am. J. Phys. 1982. V. 50. P. 45.
28. *Averbuch P. G.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. V. 19. P. 2325.
29. *Verhaar B. J. et al.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 1424.
30. *Khuri N. N. et al.* // J. Math. Phys. 2009. V. 50. 072105.
31. *Bollé D., Gesztesy F.* // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 1279.
32. *Adhikari S. K.* // Am. J. Phys. 1986. V. 54. P. 362.
33. *Adhikari S. K., Gibson W. G.* // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 3967.
34. *Rakityansky S. A., Elander N.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. V. 45. 135209.
35. *Пупышев В. В.* Рассеяние медленной квантовой частицы аксиально-симметричным короткодействующим потенциалом. Препринт ОИЯИ Р4-2012-119. Дубна, 2012.
36. *Пупышев В. В.* Энергии слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы в двумерной плоскости. Препринт ОИЯИ Р4-2013-81. Дубна, 2013.
37. *Randeria M., Duan J.-M., Shieh L.-Y.* // Phys. Rev. B. 1990. V. 41. P. 327.
38. *Klawunn M., Pikovski A., Santos L.* // Phys. Rev. A. 2010. V. 82. 044701.
39. *Rosenkrantz M., Bao W.* // Phys. Rev. A. 2011. V. 84. 050701.
40. *Clade P. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. 170401.

Получено 6 августа 2013 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 21.10.2013.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,62. Уч.-изд. л. 1,93. Тираж 270 экз. Заказ № 58087.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/