P5-2014-45

Н. Д. Дикусар *

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

* E-mail: dnd@jinr.ru

Дикусар Н. Д. Р5-2014-45
Полиномиальная аппроксимация высоких порядков

Предложен новый подход к полиномиальной аппроксимации (сглаживанию) высоких порядков, основанный на *методе базисных элементов* (МБЭ). МБЭ-многочлен степени n определяется по четырем базисным элементам, заданным на *трехточечной* сетке $x_0 + \alpha < x_0 < x_0 + \beta$, $\alpha\beta < 0$. Получены формулы для вычисления коэффициентов полиномиальной модели 12-го порядка, зависящие от *длины* интервала, *непрерывных параметров* α, β и *значений производных* $f^{(m)}(x_0 + \nu)$, $\nu = \alpha, \beta, 0$, $m = \overline{0{,}3}$. Применение МБЭ-многочленов высоких степеней для кусочно-полиномиальной аппроксимации и сглаживания повышает *устойчивость* и *точность* вычислений *при увеличении шага сетки*, а также *понижает вычислительную сложность* алгоритмов.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2014

Dikusar N. D. P5-2014-45
Polynomial Approximation of the High Orders

The new approach is proposed to the high orders polynomial approximation (smoothing), based on *the basic elements method* (BEM). The nth-degree BEM-polynomial is expressed in the form of *four* basic elements, given at a *three-point* grid $x_0 + \alpha < x_0 < x_0 + \beta$, $\alpha\beta < 0$. Formulae of calculation coefficients of the 12th order polynomial model depending on *length* of an interval, *continuous parameters* α, β and *values of derivatives* $f^{(m)}(x_0 + \nu)$, $\nu = \alpha, \beta, 0$, $m = \overline{0.3}$ are received. Application of the BEM-polynomial of high degrees for piecewise polynomial approximations (PWA) and smoothing increases *stability* and *accuracy* of calculations at *growth of a step of a grid,* and *downturns computing complexity* as well.

The investigation has been performed at the Laboratory of Infomation Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Приближение многочленами гладких функций, заданных аналитически или наборами точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ на плоскости, является классической проблемой в математике. Задачи полиномиальной аппроксимации, экстраполяции и сглаживания широко используются как в теоретических, так и в прикладных исследованиях и рассматриваются в различных аспектах, с различной степенью глубины в огромном числе статей и монографий. Для аппроксимации и сглаживания кривых (поверхностей) со сложными зависимостями, искаженных случайными ошибками, наиболее часто используют *сплайны, кусочно-полиномиальную аппроксимацию* (КПА) и *среднеквадратичную кусочно-полиномиальную аппроксимацию* (СКПА). Важной задачей при этом является повышение их *эффективности*.

Использование многочленов высоких степеней является перспективным в плане повышения эффективности методов КПА и СКПА. Хотя на практике многочлены высоких степеней используются редко из-за *неустойчивости* расчетов и *большой* вычислительной сложности, по *точности* и *качеству* аппроксимации они дают меньшую остаточную дисперсию и более близкий результат к экспериментальным значениям. В недавно предложенном методе базисных элементов (МБЭ) алгебраический многочлен преобразуется к форме МБЭ-многочлена, заданного на *локальной трехточечной* сетке $\Delta_3^{\alpha\beta} : x_\alpha = x_0 + \alpha < x_0 < x_0 + \beta = x_\beta$, $\alpha\beta < 0$, $\beta > 0$, в общем случае неравномерной.

Базисные функции МБЭ-многочлена в известном смысле играют ту же роль, что и многочлены Чебышева [1] в теории приближения функций. Логически близкие к моносплайнам [2], они определяются через *базисные элементы* — одну кубическую и три квадратичные параболы [3]. Коэффициенты МБЭ-многочлена степени n, аппроксимирующего $f(x)$, зависят от непрерывных параметров α, β, длины интервала $\gamma = \beta - \alpha$ и значений $f^{(j)}$, $j = \overline{0, \lfloor n/3 \rfloor}$, в узлах сетки $\Delta_3^{\alpha\beta}$ [4].

В методах кусочно-полиномиальной или сплайновой аппроксимации многочлены высоких степеней особенно выгодны, поскольку они обеспечивают *лучшую глобальную гладкость* за счет *уменьшения числа узлов* [5, 6].

В данной статье получены *новые формулы* для вычисления коэффициентов МБЭ-многочленов 11-й степени. Их эффективность подтверждена расчетами при сглаживании экспериментальных данных и аппроксимации тестовых функций, в том числе параметрически заданных.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 кратко изложены свойства базисных элементов и конструкция МБЭ-многочлена [3, 4]. В разд. 2 даются правила и формулы для вычисления коэффициентов МБЭ-многочленов 5-й–11-й степеней на неравномерной сетке $\Delta_3^{\alpha\beta}$. Формулы для коэффициентов d_i, $i = \overline{0{,}11}$, в разложении функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$ на равномерной сетке Δ_3^h приведены в разд. 3. Численные расчеты конкретных задач кусочно-полиномиального приближения функций и сглаживания экспериментальных данных даются в разд. 4 и 5. Применение МБЭ-многочленов 11-й степени для аппроксимации кривых, заданных параметрически, рассматривается в разд. 6

1. БАЗИСНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И КОНСТРУКЦИЯ МБЭ-МНОГОЧЛЕНА

Базисные элементы w_1, w_2, w_3 и Q зависят от переменной τ и непрерывных параметров α, β, между которыми установлена *внутренняя связь* специальным правилом сложного отношения четырех точек $[\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4] = [13]/[23] : [34]/[14]$, $[ij] = \xi_j - \xi_i$, $\xi_j \neq \xi_i$. Для четверки $[\tau\alpha\beta 0]$ это правило порождает *три* базисных элемента w_i, $i = \overline{1{,}3}$ [3, 4]:

$$w_1 = \frac{-\tau(\tau-\beta)}{\alpha\gamma}, \quad w_2 = \frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}, \quad w_3 = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta},$$

$$\sum_{i=1}^{3} w_i = 1, \quad \gamma = \beta - \alpha. \tag{1.1}$$

Четвертый элемент $Q = \alpha\beta\tau w_3$ представляет «зануляющую» кубическую параболу:

$$Q = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta), \quad \tau,\, \alpha,\, \beta \in R, \quad \alpha\beta\gamma \neq 0. \tag{1.2}$$

Переменная $\tau = x - x_0$ и параметры $\alpha = x_\alpha - x_0$, $\beta = x_\beta - x_0$ зависят от положения x_0 на сетке $\Delta_3^{\alpha\beta}$.

Базисные элементы w_i и Q образуют *структуру* с частичной симметрией относительно перестановки $\alpha \leftrightarrow \beta$: $w_1 \leftrightarrow w_2$, $w_3 \leftrightarrow w_3$, $Q \leftrightarrow Q$. Функция Q является *однородной*: $Q(\mu\tau, \mu\alpha, \mu\beta) = \mu^3 Q(\tau, \alpha, \beta)$, а $w_i(\mu\tau, \mu\alpha, \mu\beta) = w_i(\tau, \alpha, \beta)$, $\mu \neq 0$, $\mu \in R$, обладают *масштабной инвариантностью*.

Как показано в [4], алгебраический многочлен $P_n(x;\mathbf{a}) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ можно представить через *базисные функции* $b_{ji} = Q^j w_i$ (компоненты $\mathbf{b}_j$) в виде

$$P_{n\downarrow m}(x,\alpha,\beta;\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_j^T \mathbf{r}_j, \quad m = \lfloor n/3 \rfloor \,, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{b}_j = Q^j \mathbf{w}^T = [b_{j1}, b_{j2}, b_{j3}]^T$, $\mathbf{r}_j = [r_{j\alpha}, r_{j\beta}, r_{j0}]^T$ — *коэффициенты* и $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$. Функции $b_{ji}(\tau,\alpha,\beta)$, $i = \overline{1,3}$, являются многочленами степени $3j+2$, $j = \overline{0,m}$, с нулями в узлах сетки $\Delta_3^{\alpha\beta}$, где m — максимальная степень Q.

Запишем уравнения линий, проходящих через тройки несовпадающих точек плоскости $(x_\nu, r_{j\nu})$, $\nu = \alpha, \beta, 0$, в виде свертки векторов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{r}_j$:

$$\Pi_j(\tau,\alpha,\beta;\mathbf{r}_j) = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_j = r_{j\alpha} w_1 + r_{j\beta} w_2 + r_{j0} w_3, \quad j = \overline{0,m}. \tag{1.4}$$

В геометрическом смысле эти уравнения, в зависимости от расположения $r_{j\nu}$ на вертикалях $x = x_\nu$, $\nu = \alpha, \beta, 0$, представляют *квадратичные параболы*, *наклонные* или *горизонтальные* прямые. С учетом (1.4) формула (1.3) принимает вид

$$P_{n\downarrow m}(x,\alpha,\beta;\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{m} Q^j \Pi_j, \quad m = \lfloor n/3 \rfloor \,.$$

Длина отрезка $[x_\alpha, x_\beta]$ равна $\gamma = \beta - \alpha$. При сдвиге x_0 в пределах $[x_\alpha, x_\beta]$ изменяются значения α и β, которые в этом случае играют роль *управляющих параметров*, поскольку сдвиг x_0 приводит к изменению *базисных функций* и *числа обусловленности* нормальной матрицы, влияющих на конечный результат [4]. Коэффициенты $r_{j\nu}$ вычисляются через α, β и значения $P_n^{(j)}(x_\nu, \mathbf{a})$, $\nu = \alpha, \beta, 0$, $j = \overline{0,m}$.

Легко видеть, что в конструкции МБЭ-многочлена на трехточечной сетке *синтезированы* свойства многочленов Тейлора и многочленов Лагранжа второй степени.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ $r_{j\nu}$

Общее правило для расчета коэффициентов $r_{j\nu}$ изложено в работе [4]. В данном разделе даются правила вычисления $r_{j\nu}$ для МБЭ-многочленов n-й степени, $3 \leqslant n \leqslant 11$, аппроксимирующих функцию $f(x) \in C^{(m)}_{[x_\alpha, x_\beta]}$, $m = \lfloor n/3 \rfloor$.

Таблица 1

ν	w'_1	w'_2	w'_3	w''_1	w''_2	w''_3	Q'	Q''	Q'''
α	$(\gamma-\alpha)/(\alpha\gamma)$	$\alpha/\beta\gamma$	$-\gamma/\alpha\beta$	$-2/\alpha\gamma$	$2/\beta\gamma$	$2/\alpha\beta$	$-\alpha\gamma$	$4\alpha-2\beta$	6
β	$-\beta/\alpha\gamma$	$\gamma+\beta/\beta\gamma$	$\gamma/\alpha\beta$	$-2/\alpha\gamma$	$2/\beta\gamma$	$2/\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$4\beta-2\alpha$	6
0	$\beta/\alpha\gamma$	$-\alpha/\beta\gamma$	$-(\alpha+\beta)/\alpha\beta$	$-2/\alpha\gamma$	$2/\beta\gamma$	$2/\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$-2(\alpha+\beta)$	6

Коэффициенты МБЭ-многочлена второй степени $f \approx P_{2\downarrow 0} = \mathbf{b}_0^T\mathbf{r}_0 = f_\alpha w_1 + f_\beta w_2 + f_0 w_3$ равны значениям функции f в узлах $\Delta_3^{\alpha\beta}$, т. е. $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{f} = [f_\alpha, f_\beta, f_0]^T$.

Для $n > 2$ компоненты $\mathbf{r}_j$ вычисляются по $f_\nu^{(j)}$, $Q_\nu^{(j)}$ и $w_\nu^{(j)}$, $j = \overline{0,m}$, $\nu = \alpha, \beta, 0$. Ненулевые значения $Q_\nu^{(j)}$ и $w_\nu^{(j)}$ определяются через параметры α, β и γ [4] (табл. 1).

В работе [7] коэффициенты МБЭ-модели шестого порядка $f \approx P_{5\downarrow 1} = P_{2\downarrow 0} + \mathbf{b}_1^T\mathbf{r}_1$ определялись через α, β и значения f, f' в узлах сетки $\Delta_3^{\alpha\beta}$, при этом $r_{1\nu}$ находились из условий $(f - \Pi_0 - Q\Pi_1)'_{x=x_\nu} = 0$:

$$r_{1\nu} = \Pi_1(x_\nu) = [f'(x_\nu) - \Pi'_0(x_\nu, \alpha, \beta; \mathbf{r}_0)]/Q'(x_\nu, \alpha, \beta), \quad \nu = \alpha, \beta, 0. \tag{2.1}$$

Подстановкой x_ν, α, β в (2.1), с учетом (1.1), (1.2) и табл. 1, получим

$$\begin{aligned} r_{1\alpha} =& H\left\{-\beta f'_\alpha + \frac{1}{\alpha\gamma}[\beta(\gamma-\alpha)f_\alpha + \alpha^2 f_\beta - \gamma^2 f_0]\right\}, \\ r_{1\beta} =& H\left\{\alpha f'_\beta + \frac{1}{\beta\gamma}[\beta^2 f_\alpha - \alpha(\beta+\gamma)f_\beta - \gamma^2 f_0]\right\}, \\ r_{10} =& H\left\{\gamma f'_0 + \frac{1}{\alpha\beta}[-\beta^2 f_\alpha + \alpha^2 f_\beta + \gamma(\alpha+\beta)f_0]\right\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $H = 1/(\alpha\beta\gamma)$.

По аналогии компоненты вектора $\mathbf{r}_2$ МБЭ-модели $f \approx P_{8\downarrow 2} = P_{5\downarrow 1} + \mathbf{b}_2^T\mathbf{r}_2$ можно получить с помощью формулы Лейбница из условия $(f - \Pi_0 - Q\Pi_1 - Q^2\Pi_2)''_{x=x_\nu} = 0$:

$$r_{2\nu} = \Pi_2(x_\nu) = (f''_\nu - \Pi''_{0\nu} - Q''_\nu \Pi_{1\nu} - 2Q'_\nu \Pi'_{1\nu})/(2Q'^2_\nu), \nu = \alpha, \beta, 0. \tag{2.3}$$

Раскрывая правую часть (2.3), с учетом табл. 1 и (1.1), (1.2), находим

$$r_{2\alpha}=\frac{1}{\alpha^2\gamma^2}\left\{\frac{f''_\alpha}{2!}+H[\beta f_\alpha-\alpha f_\beta-\gamma f_0]+\frac{1}{\beta}[\beta(\gamma-\alpha)r_{1\alpha}+\alpha^2 r_{1\beta}-\gamma^2 r_{10}]\right\},$$

$$r_{2\beta}=\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\left\{\frac{f''_\beta}{2!}+H[\beta f_\alpha-\alpha f_\beta-\gamma f_0]+\frac{1}{\alpha}[\beta^2 r_{1\alpha}-\alpha(\beta+\gamma)r_{1\beta}-\gamma^2 r_{10}]\right\},$$

$$r_{20}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\left\{\frac{f''_0}{2!}+H[\beta f_\alpha-\alpha f_\beta-\gamma f_0]+\frac{1}{\gamma}[-\beta^2 r_{1\alpha}+\alpha^2 r_{1\beta}+\gamma(\alpha+\beta)r_{10}]\right\}. \tag{2.4}$$

Формулы для $r_{3\nu}$ модели 12-го порядка $f \approx P_{11\downarrow 3} = P_{8\downarrow 2} + \mathbf{b}_3^T\mathbf{r}_3$ определяются из условий $(f - \Pi_0 - Q\Pi_1 - Q^2\Pi_2 - Q^3\Pi_3)'''_{x=x_\nu} = 0$:

$$r_{3\nu} = \Pi_3(x_\nu;\alpha,\beta) = \frac{1}{6Q'^3_\nu}[f'''_\nu - Q'''_\nu\Pi_{1\nu} -$$

$$- 3Q''_\nu\Pi'_{1\nu} - 3Q'_\nu\Pi'^2_{1\nu} - 6Q''_\nu Q''_\nu\Pi_{2\nu} - 6Q'^2_\nu\Pi'_{2\nu}], \nu = \alpha,\beta,0. \tag{2.5}$$

После подстановки x_ν, α, β в правую часть (2.5) получим формулы для $r_{3\nu}$:

$$r_{3\alpha} = \frac{1}{\alpha^3\gamma^3}\Big\{\frac{-1}{3!}f_\alpha''' + r_{1\alpha} - 2\alpha\gamma(\gamma-\alpha)r_{2\alpha} + \frac{1}{\beta}[\beta r_{1\alpha} - \alpha r_{1\beta} - \gamma r_{10}] -$$

$$-(\gamma-\alpha)H[\beta(\gamma-\alpha)r_{1\alpha}+\alpha^2 r_{1\beta}-\gamma^2 r_{10}]+\frac{\alpha\gamma}{\beta}[\beta(\gamma-\alpha)r_{2\alpha}+\alpha^2 r_{2\beta}-\gamma^2 r_{20}]\Big\},$$

$$r_{3\beta} = \frac{1}{\beta^3\gamma^3}\Big\{\frac{1}{3!}f'''_\beta - r_{1\beta} - 2\beta\gamma(\beta+\gamma)r_{2\beta} + \frac{1}{\alpha}[\beta r_{1\alpha} - \alpha r_{1\beta} - \gamma r_{10}] +$$

$$+(\beta+\gamma)H[\beta^2 r_{1\alpha}-\alpha(\beta+\gamma)r_{1\beta}-\gamma^2 r_{10}]+\frac{\beta\gamma}{\alpha}[\beta^2 r_{2\alpha}-\alpha(\beta+\gamma)r_{2\beta}-\gamma^2 r_{20}]\Big\}, \tag{2.6}$$

$$r_{30} = \frac{1}{\alpha^3\beta^3}\Big\{\frac{1}{3!}f'''_0 - r_{10} + 2\alpha\beta(\alpha+\beta)r_{20} + \frac{1}{\gamma}[\beta r_{1\alpha} - \alpha r_{1\beta} - \gamma r_{10}] +$$

$$+(\alpha+\beta)H[-\beta^2 r_{1\alpha}+\alpha^2 r_{1\beta}+\gamma(\alpha+\beta)r_{10}]+\frac{\alpha\beta}{\gamma}[-\beta^2 r_{2\alpha}+\alpha^2 r_{2\beta}+\gamma(\alpha+\beta)r_{20}]\Big\}.$$

Правило вычисления $r_{j\nu}$ обобщается на случай многочленов более высокой степени [4].

Образуем векторы $\mathbf{v} = [\beta, -\alpha, -\gamma]^T$, $\mathbf{v}_\alpha = [\beta(\gamma-\alpha), \alpha^2, -\gamma^2]^T$, $\mathbf{v}_\beta = [\beta^2, -\alpha(\beta+\gamma), -\gamma^2]^T$ и $\mathbf{v}_0 = [-\beta^2, \alpha^2, \gamma(\alpha+\beta)]^T$ с компонентами, зависящими от параметров сетки $\Delta_3^{\alpha\beta}$. С помощью свертки $\mathbf{r}_j$, $j=\overline{0{,}3}$, с $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_\nu$, $\nu = \alpha, \beta, 0$, формулы (2.2), (2.4) и (2.6) упрощаются:

$$\begin{aligned} r_{1\alpha} &= \frac{1}{\alpha\gamma}\left\{-f'_\alpha + H\mathbf{v}_\alpha^T\mathbf{r}_0\right\}, \\ r_{1\beta} &= \frac{1}{\beta\gamma}\left\{f'_\beta + H\mathbf{v}_\beta^T\mathbf{r}_0\right\}, \\ r_{10} &= \frac{1}{\alpha\beta}\left\{f'_0 + H\mathbf{v}_0^T\mathbf{r}_0\right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

По аналогии компоненты в $\mathbf{r}_2$ (2.4) и $\mathbf{r}_3$ (2.6) принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} r_{2\alpha} &= \frac{1}{\alpha^2\gamma^2}\left\{\frac{f''_\alpha}{2!} + (\gamma-\alpha)r_{1\alpha} + H\mathbf{v}^T\mathbf{r}_0 + \frac{1}{\beta}\mathbf{v}_\alpha^T\mathbf{r}_1\right\}, \\ r_{2\beta} &= \frac{1}{\beta^2\gamma^2}\left\{\frac{f''_\beta}{2!} - (\beta+\gamma)r_{1\beta} + H\mathbf{v}^T\mathbf{r}_0 + \frac{1}{\alpha}\mathbf{v}_\beta^T\mathbf{r}_1\right\}, \\ r_{20} &= \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\left\{\frac{f''_0}{2!} + (\alpha+\beta)r_{10} + H\mathbf{v}^T\mathbf{r}_0 + \frac{1}{\gamma}\mathbf{v}_0^T\mathbf{r}_1\right\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} r_{3\alpha} = \frac{1}{\alpha^3\gamma^3}\Big\{&\frac{-f'''_\alpha}{3!} + r_{1\alpha} - 2\alpha\gamma(\gamma-\alpha)r_{2\alpha} + \\ &+ \frac{1}{\beta}\mathbf{v}^T\mathbf{r}_1 - (\gamma-\alpha)H\mathbf{v}_\alpha^T\mathbf{r}_1 + \frac{\alpha\gamma}{\beta}\mathbf{v}_\alpha^T\mathbf{r}_2\Big\}, \\ r_{3\beta} = \frac{1}{\beta^3\gamma^3}\Big\{&\frac{f'''_\beta}{3!} - r_{1\beta} - 2\beta\gamma(\beta+\gamma)r_{2\beta} + \\ &+ \frac{1}{\alpha}\mathbf{v}^T\mathbf{r}_1 + (\beta+\gamma)H\mathbf{v}_\beta^T\mathbf{r}_1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\mathbf{v}_\beta^T\mathbf{r}_2\Big\}, \\ r_{30} = \frac{1}{\alpha^3\beta^3}\Big\{&\frac{f'''_0}{3!} - r_{10} + 2\alpha\beta(\alpha+\beta)r_{20} + \\ &+ \frac{1}{\gamma}\mathbf{v}^T\mathbf{r}_1 + (\alpha+\beta)H\mathbf{v}_0^T\mathbf{r}_1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\mathbf{v}_0^T\mathbf{r}_2\Big\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Отметим, что сумма компонент в каждом векторе $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{v}_\beta$ и $\mathbf{v}_0$ равна нулю. Для удобства компоненты векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_\nu$ и *множители* при свертках $\mathbf{v}_*^T\mathbf{r}_*$ (обозначим их через A_ν, B_ν, C_ν, D_ν, E_ν, F_ν, G_ν, $\nu = \alpha$, β, 0) разместим в табл. 2, 3.

Таблица 2

ν	$\mathbf{v}$	$\mathbf{v}_\alpha$	$\mathbf{v}_\beta$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_3$
α	β	$\beta(\gamma-\alpha)$	β^2	$-\beta^2$	f_α	$\mathrm{r}_{1\alpha}$	$\mathrm{r}_{2\alpha}$	$\mathrm{r}_{3\alpha}$
β	$-\alpha$	α^2	$-\alpha(\beta+\gamma)$	α^2	f_β	$\mathrm{r}_{1\beta}$	$\mathrm{r}_{2\beta}$	$\mathrm{r}_{3\beta}$
0	$-\gamma$	$-\gamma^2$	$-\gamma^2$	$\gamma(\alpha+\beta)$	f_0	r_{10}	r_{20}	r_{30}

Таблица 3

ν	A_ν	B_ν	C_ν	D_ν	E_ν	F_ν	G_ν
α	$\alpha\gamma$	$\gamma-\alpha$	-1	$1/\beta$	$-\alpha\gamma(\gamma-\alpha)$	$H(\alpha-\gamma)$	$\alpha\gamma/\beta$
β	$\beta\gamma$	$-(\beta+\gamma)$	1	$1/\alpha$	$-\beta\gamma(\beta+\gamma)$	$H(\beta+\gamma)$	$\beta\gamma/\alpha$
0	$\alpha\beta$	$\alpha+\beta$	1	$1/\gamma$	$\alpha\beta(\alpha+\beta)$	$H(\alpha+\beta)$	$\alpha\beta/\gamma$

В обозначениях из табл. 2, 3 формулы (2.7)–(2.9) запишутся в виде

$$r_{1\nu} = \mathrm{A}_\nu^{-1}[\frac{\mathrm{C}_\nu f'_\nu}{1!} + H\mathbf{v}_\nu^T\mathbf{r}_0], \tag{2.10}$$

$$r_{2\nu} = \mathrm{A}_\nu^{-2}[\frac{f''_\nu}{2!} + \mathrm{B}_\nu r_{1\nu} + H\mathbf{v}^T\mathbf{r}_0 + \mathrm{D}_\nu\mathbf{v}_\nu^T\mathbf{r}_1], \tag{2.11}$$

$$r_{3\nu} = \mathrm{A}_\nu^{-3}[\frac{\mathrm{C}_\nu f'''_\nu}{3!} - \mathrm{C}_\nu r_{1\nu} + 2\mathrm{E}_\nu r_{2\nu} + \tag{2.12}$$
$$+ \mathrm{D}_\nu\mathbf{v}^T\mathbf{r}_1 + \mathrm{F}_\nu\mathbf{v}_\nu^T\mathbf{r}_1 + \mathrm{G}_\nu\mathbf{v}_\nu^T\mathbf{r}_2], \quad \nu=\alpha,\beta,0.$$

Легко заметить, что компоненты векторов $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{j-1}, \alpha, \beta; f_\nu^{(j)})$, $j=\overline{1,3}$, $\nu=\alpha,\beta,0$, вычисляются *рекурсивно*, а при увеличении степени МБЭ-многочлена достаточно найти компоненты только для вектора $\mathbf{r}_{m+1}$, так как $P_{n+3\downarrow m+1} = P_{n\downarrow m} + \mathbf{b}_{m+1}\mathbf{r}_{m+1}$.

Число арифметических операций для фиксированных α и β можно *уменьшить* путем табулирования компонент векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{v}_\beta$, $\mathbf{v}_0$ и величин $1/\mathrm{A}_\nu$, $1/(\mathrm{A}_\nu)^2$, $1/(\mathrm{A}_\nu)^3$, B_ν, C_ν, D_ν, E, F_ν, G_ν, H. В этом случае на вычисление одной компоненты в $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ по формулам (2.10)–(2.12) понадобится соответственно 8, 18 и 30 операций или в среднем 14 коротких операций на один коэффициент.

Замечание 1. В формулах (2.10)–(2.12) первые слагаемые в квадратных скобках с точностью до знака равны коэффициентам многочлена Тейлора, вычисленным в узлах сетки $\Delta_3^{\alpha\beta}$. Коэффициенты $r_{j\nu}$, $j=\overline{0,3}$, *расположены на линиях* $x=x_\nu$, $\nu=\alpha,\beta,0$, а коэффициенты Тейлора — на $x=x_0$. Зависимость $r_{j\nu}$ от $f_\nu^{(j)}$ обеспечивает гладкость j-го порядка в узлах стыковки для алгоритмов КПА.

3. КОЭФФИЦИЕНТЫ МБЭ-МНОГОЧЛЕНА В БАЗИСЕ $\{(x-x_0)^i\}_{i=0}^n$

МБЭ-многочлен степени n на равномерной сетке $\Delta_3^h : x_0 - h < x_0 < x_0 + h$ принимает вид

$$P_{n\downarrow m}(\tau;h;\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{m} Q^j(\tau;h)[w_1(\tau;h)r_{j(-h)} + w_2(\tau;h)r_{jh} + w_3(\tau;h)r_{j0}],$$
$$m = \lfloor n/3 \rfloor . \quad (3.1)$$

Следуя теореме о вычислении коэффициентов $d_i\ (h; f_\nu^{(j)})$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,1}$, $\nu = -h, h, 0$, многочлена 5-й степени [7], найдем коэффициенты в разложении $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$:

$$f(x) \approx D_{n\downarrow m}(x-x_0;\mathbf{d}) = \sum_{i=0}^{n} d_i (x-x_0)^i,$$
$$x \in [x_0 - h, x_0 + h], \quad n = 5,\ 8,\ 11. \quad (3.2)$$

Чтобы получить формулы для d_i, $i = \overline{0,n}$, $n = 5,\ 8,\ 11$, подставим $r_{j\nu}$ из (2.2), (2.4), (2.6) в правую часть (3.1) при $\alpha = -h$, $\beta = h$ и соберем множители при $(x - x_0)^i$.

Введем обозначения, аналогичные первым и вторым разностям функций $\phi = f^{(j)}$, $j = \overline{0,3}$, в узлах сетки Δ_3^h:

$$I\nabla\phi = I(\phi_h - \phi_{-h}) \quad \text{и} \quad \nabla^2\phi(J,K,L) = J\phi_{-h} + K\phi_0 + L\phi_h, \quad (3.3)$$

где $\phi_{\mp\nu} = f^{(j)}(x_0 \mp \nu)$, $\nu = -h, 0, h$; $I, J, K, L \in Z$.

I, J, K, L появляются при вычислении $r_{j\nu}$, $\nu = -h, 0, h$. В обозначениях (3.3) формулы для d_i в многочленах $D_{5\downarrow 1}(x-x_0;\mathbf{d})$, $D_{8\downarrow 2}(x-x_0;\mathbf{d})$ и $D_{11\downarrow 3}(x-x_0;\mathbf{d})$ на сетке Δ_3^h запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&d_0 = f_0, \quad d_1 = f_0',\\
&d_2 = [\nabla^2 f(4,-8,4) - h\nabla f']/(4h^2),\\
&d_3 = [5\nabla f - h\nabla^2 f'(1,8,1)]/(4h^3),\\
&d_4 = [\nabla^2 f(-2,4,-2) - h\nabla f']/(4h^4),\\
&d_5 = [-3\nabla f + h\nabla^2 f'(1,4,1)]/(4h^5)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

$$
\begin{aligned}
&d_0 = f_0, \quad d_1 = f_0', \quad d_2 = f_0''/2!,\\
&d_3 = [35\nabla f - h\nabla^2 f'(11,48,11) + h^2\nabla f'']/(16h^3),\\
&d_4 = [\nabla^2 f(48,-96,48) - 13h\nabla f' + h^2\nabla^2 f''(1,-24,1)]/(16h^4),\\
&d_5 = [-42\nabla f - h\nabla^2 f'(18,48,18) - 2h^2\nabla f'']/(16h^5),\\
&d_6 = [-\nabla^2 f(64,-128,64) + 22h\nabla f' - h^2\nabla^2 f''(2,-24,2)]/(16h^6),\\
&d_7 = [15\nabla f - h\nabla^2 f'(7,16,7) + h^2\nabla f'']/(16h^7),\\
&d_8 = [\nabla^2 f(24,-48,24) - 9h\nabla f' + h^2\nabla^2 f''(1,-8,1)]/(16h^8)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

и

$$
\begin{gathered}
d_0 = f_0, \quad d_1 = f_0', \quad d_2 = f_0''/2!, \quad d_3 = f_0'''/3!,\\
d_4 = [\nabla^2 f(480,-960,480) - 165h\nabla f' + h^2\nabla^2 f''(21,-192,21) -\\
-h^3\nabla f''']/(96h^4),\\
d_5 = [693\nabla f - h\nabla^2 f'(213,960,213) + h^2 24\nabla f'' -\\
-h^3\nabla^2 f'''(1,64,1)]/(96h^5),\\
d_6 = [\nabla^2 f(-320,640,-320) + 131h\nabla f' + h^2\nabla^2 f''(-19,96,-19) +\\
+h^3\nabla f''']/(32h^6),\\
d_7 = [-495\nabla f + h\nabla^2 f'(175,640,175) - h^2 22\nabla f'' +\\
+h^3\nabla^2 f'''(1,32,1)]/(32h^7),\\
d_8 = [\nabla^2 f(240,-480,240) - 105h\nabla f' - h^2\nabla^2 f''(-17,64,-17) -\\
-h^3\nabla f''']/(32h^8),\\
d_9 = [1155\nabla f - h\nabla^2 f'(435,1440,435) + h^2 60\nabla f'' -\\
-h^3\nabla^2 f'''(3,64,3)]/(96h^9),\\
d_{10} = [\nabla^2 f(-192,384,-192) + 87h\nabla f' + h^2\nabla^2 f''(-15,48,-15) +\\
+h^3\nabla f''']/(96h^{10}),\\
d_{11} = [-315\nabla f + h\nabla^2 f'(123,384,123) - h^2 18\nabla f'' +\\
+h^3\nabla^2 f'''(1,16,1)]/(96h^{11}).
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

Формулы (3.4)–(3.6) обеспечивают *равномерное* распределение ошибки $\varepsilon(x) = |f(x) - D_{n\downarrow m}(x;\mathbf{d})|$ в промежутке $[x_0-h,\ x_0+h]$ и используют *намного больше* арифметических операций по сравнению с числом операций, необходимым для нахождения коэффициентов многочлена Тейлора степени n в точке x_0.

Однако общую эффективность расчетов можно увеличить за счет использования m-го порядка производных ($m = 3 \ll 11$) и величины шага h. При $i \leqslant m$ коэффициенты d_i совпадают с коэффициентами Тейлора, а при $i > m$ они вычисляются через h и $f_\nu^{(j)}$, $\nu = -h, h, 0$, $j = \overline{0,m}$.

Замечание 2. Выбор h зависит от поведения $f^{(j)}$, $j = \overline{0,m}$, на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$.

В следующих разделах формулы (2.7)–(2.9) и (3.3)–(3.6) применяются для аппроксимации сложных функциональных зависимостей и сглаживания данных с ошибками.

4. СЕГМЕНТАЦИЯ КРИВЫХ

В этом разделе используются алгоритмы КПА для приближения гладких функций и СКПА [7] для сглаживания экспериментальных данных.

Обозначим через N_k число сегментов, аппроксимирующих f на последовательности *локальных* сеток $\Delta_3^{\alpha_k\beta_k} \subseteq \Delta_{[a,b]}$, $k = \overline{1, N_k}$, где $\Delta_{[a,b]}$ — *глобальная* сетка, $a = x_1 < x_2 < ... < x_J = b$, $J = 2N_k + 1$, причем в узлах стыковки $\alpha_k \equiv \beta_{k-1}$, $k > 1$.

Алгоритм КПА. Алгоритм *сегментации* гладкой функции f МБЭ-многочленами на сетке $\Delta_{[a,b]}$ состоит из *двух* этапов.

I. Вычисление $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, $j = \overline{0,3}$, в узлах x_i, $i = \overline{1,N_i}$, $N_i \geqslant 3$.

II. Вычисление $\{r_{j\nu}\}_k$, $\nu = \alpha_k, \beta_k, 0_k$, $j = \overline{0,3}$, по формулам (2.7)–(2.9) или $\mathbf{d}_k$, $k = \overline{1, N_k}$, по формулам (3.3)–(3.6) для N_k сегментов с использованием троек $\{f_1^{(j)}, f_2^{(j)}, f_3^{(j)}\}$, $\{f_3^{(j)}, f_4^{(j)}, f_5^{(j)}\}$, $\ldots$, $\{f_{N_i-2}^{(j)}, f_{N_i-1}^{(j)}, f_{N_i}^{(j)}\}$, посчитанных в узлах локальных сеток $\Delta_3^{\alpha_k\beta_k} : x_{0_k} + \alpha_k < x_{0_k} < x_{0_k} + \beta_k$ при условиях $x_{0_k} + \alpha_k \equiv x_{0_{k-1}} + \beta_{k-1}$.

Замечание 3. Непрерывность и гладкость в узлах «склейки» соседних сегментов гарантируются условиями $x_{\alpha_k} \equiv x_{\beta_{k-1}}$ и $f_{\alpha_k}^{(j)} \equiv f_{\beta_{k-1}}^{(j)}$. Значения $f_\nu^{(j)}$ можно находить численно по дополнительным точкам в небольших окрестностях узлов глобальной сетки. Известно, что наряду с *порядком и качеством* аппроксимации длина промежутка $\gamma = \beta - \alpha$, на котором многочлен аппроксимирует f, является *наиболее критическим параметром* в стоимости вычислений методов КПА. Благодаря этому в задачах, где не требуется высокая точность, эффективность аппроксимации можно повысить за счет увеличения длины промежутка γ.

Пример 1. Применим алгоритм КПА для приближения функции Рунге

$$f(x) = 1/(1 + 25x^2), \quad x \in [-1, 1], \tag{4.1}$$

многочленами Тейлора 11-й степени — $T_{11}(x - x_0;\mathbf{c})$ и $D_{11\downarrow 3}(x - x_0;\mathbf{d})$. Заметим, что в приближении $f \approx D_{11\downarrow 3}(x - x_0; \mathbf{d})$ используются значения

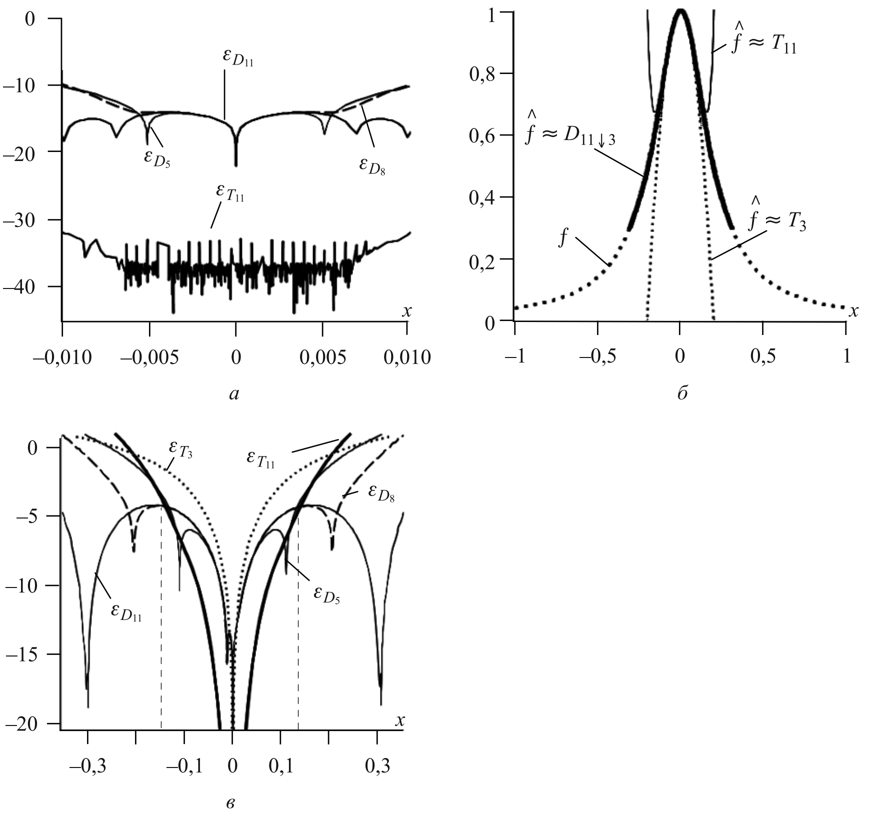

Рис. 1. Приближение функции Рунге. Ошибки $\varepsilon_D(x, h, f_\nu^{(j)})$ и $\varepsilon_T(x, f_0^{(i)})$ для $h = 0{,}01$ и $0{,}31$

$f^{(j)}$, $j = \overline{0{,}3}$, в трех узлах, а в $f \approx T_{11}(x - x_0;\mathbf{c})$ — значения $f^{(i)}$, $i = \overline{0{,}11}$, только в одном узле x_0.

Сделаем сравнение по точности приближения функции (4.1) многочленами $D_{11\downarrow 3}(x;\mathbf{d})$ и $T_{11}(x;\mathbf{c})$ на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ при двух значениях шага $h = 0{,}01$ и $0{,}31$.

Модули ошибок аппроксимации для $D_{11\downarrow 3}$ и T_{11} соответственно равны $\varepsilon_{D_{11}}(x) = |f(x) - D_{11\downarrow 3}(x;\mathbf{d})|$ и $\varepsilon_{T_{11}}(x) = |f(x) - T_{11}(x;\mathbf{c})|$, $x \in [x_{-h}, x_h]$. Характер поведения и максимальное значение ошибки $\varepsilon_{D_{11}}(x)$ зависят от h и $f^{(j)}(x)$, $j = \overline{0{,}3}$, а $\varepsilon_{T_{11}} = \varepsilon_{T_{11}}(x,\, f_0^{(i)})$, $i = \overline{0{,}11}$.

На рис. 1, *б* показаны аппроксиманты $\hat{f} \approx D_{11\downarrow 3}(x;\mathbf{d})$, $\hat{f} \approx T_3(x;\mathbf{c})$ и $\hat{f} \approx T_{11}(x;\mathbf{c})$, $x \in [-0{,}31, 0{,}31]$. Графики $\log \varepsilon_D(x)$ и $\log \varepsilon_T(x)$ приведены на рис. 1, *а, в*. При малом шаге $h = 0{,}01$ ошибка $\varepsilon_{T_{11}}(x)$ меньше $\varepsilon_{D_{11}}(x)$ на

20 порядков (рис. 1, a) почти на всем интервале. При $h = 0{,}31$ в окрестности узла $x_0 = 0$ $\varepsilon_{T_{11}}(x) < \varepsilon_{D_{11}}(x)$ лишь на треть длины интервала, а на остальной части промежутка $\varepsilon_{T_{11}}(x) \gg \varepsilon_{D_{11}}(x)$ (рис. 1, *в*). Значения ошибки ε_D на малом отрезке $[-0{,}01, 0{,}01]$ находятся между 10^{-20} и 10^{-10} (рис. 1, a), что вполне достаточно для решения практических задач.

Рассмотрим КПА функции Рунге (рис. 2) на глобальной равномерной сетке $\Delta_{[a,b]} : a = -1 < -0{,}5 < 0 < 0{,}5 < 1 = b$ двумя сегментами S_k с одним стыковочным узлом и локальными сетками $x_{0k} - h < x_{0_k} < x_{0_k} + h$, $k = 1{,}2$. При значениях $x_{0_1} = -0{,}5$ и $x_{0_2} = 0{,}5$ коэффициенты $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ кусочно-полиномиальной аппроксиманты

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} D_{11\downarrow 3}(x + 0{,}5; \mathbf{d}_1), & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ D_{11\downarrow 3}(x - 0{,}5; \mathbf{d}_2), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

вычислялись по формулам (3.6) (расчеты выполнены с 15 десятичными знаками): $\mathbf{d}_1 = [0{,}13793,\ 0{,}47564,\ 1{,}16446,\ 2{,}37529,\ -0{,}15232,\ 4{,}93819,$ $86{,}80537,\ 63{,}82163,\ 494{,}79481,\ 615{,}36684,\ 692{,}39091,\ 1013{,}76627]^T$,
$\mathbf{d}_2 = [0{,}13793, -0{,}47561,\ 1{,}16446,\ -2{,}37529,\ -0{,}15922,\ -4{,}92424,\ 86{,}87115,$ $-63{,}96608,\ -495{,}00570,\ 615{,}85497,\ 692{,}62389,\ -1014{,}32412]^T$.

На графиках ошибок $\varepsilon^{(j)} = \log|f^{(j)} - \hat{f}^{(j)}|$, $j = \overline{0{,}3}$, наблюдается 3-*й порядок* гладкости $\hat{f}(x)$ в узле стыковки и гладкость 11-*го порядка* внутри границ локальных сеток (рис. 2).

Максимальные ошибки $|f - \hat{f}|_{\max} < 10^{-5}$ и $|f' - \hat{f}'|_{\max} < 10^{-3}$, $x \in [-1, 1]$. Однако при увеличении числа сегментов они заметно убывают.

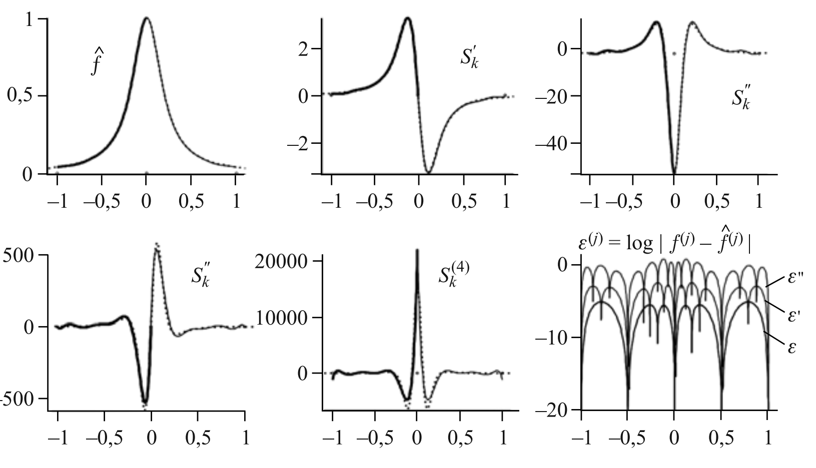

Рис. 2. Сегментация функции Рунге двумя МБЭ-многочленами 11-й степени

Например, на глобальной сетке с тринадцатью узлами ($k = 6$, $h = 0{,}165$), значения ошибок $|f^{(j)} - \hat{f}^{(j)}|$, $j = \overline{0,2}$, КПА функции Рунге (4.1) находятся на уровнях 10^{-15}, 10^{-10} и 10^{-5} соответственно.

Пример 2. Рассмотрим кривую $f(x) = F(x,y_*), x \in [-1{,}2, 2]$, расположенную в плоскости $y_* = 0{,}35$ и на поверхности, заданной уравнением [8]

$$\begin{aligned}F(x,y) = 0{,}75\exp\left(-[(9x-2)^2 + (9y-2)^2]/4\right) + \\ + 0{,}75\exp[-(9x+1)^2/49 - (9y+1)^2/10] + 0{,}5\exp[-(9x-7)^2 + \\ + (9y-3)^2]/4 - 0{,}2\exp[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2], x, y \in [-1{,}2, 2]. \quad (4.2)\end{aligned}$$

В узлах глобальной сетки Δ_{ab} : $a = -1{,}2 < -0{,}7 < -0{,}15 < 0{,}35 < 0{,}9 < 1{,}4 < 2 = b$ вычислим $f_i^{(j)}$, $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{0,3}$, и зададим параметры *трех* локальных сеток $x_{0_1} = -0{,}7$, $x_{0_2} = 0{,}35$, $x_{0_3} = 1{,}4$, $\alpha_k = -0{,}5$, $\beta_k = 0{,}55$, $k = \overline{1,3}$. Используя алгоритм КПА и модель $S_k = \sum\limits_{j=0}^{3} \mathbf{b}_j^T \hat{\mathbf{r}}_{jk}$, $k = \overline{1,3}$, получим кусочно-полиномиальную аппроксиманту $\hat{f}(x)$ (рис. 3), приведенную к стандартному виду:

$$\hat{f}(x) \approx \begin{cases} S_1(x) = 0{,}32921 + 1{,}7080x + 0{,}32921 + 2{,}9485x^2 - \\ -24{,}328x^3 - 167{,}04x^4 - 499{,}15x^5 - 896{,}36x^6 - 1044{,}2x^7 - \\ -797{,}62x^8 - 386{,}65x^9 - 108{,}07x^{10} - 13{,}278x^{11}, \ -1{,}2 \leqslant x \leqslant -0{,}15; \\ S_2(x) = 0{,}33303 + 1{,}7960x + 3{,}9088x^2 - 14{,}934x^3 - \\ -76{,}407x^4 + 49{,}281x^5 + 592{,}43x^6 - 432{,}83x^7 - \\ -2214{,}3x^8 + 4402{,}9x^9 - -3088{,}5x^{10} + 776{,}65x^{11}, \ -0{,}15 \leqslant x \leqslant 0{,}9; \\ S_3(x) = 5325{,}2 - 44414x + 1{,}657510^5x^2 - 3{,}6565\,10^5x^3 + \\ +5{,}302610^5x^4 - 5{,}314210^5x^5 + 3{,}758910^5x^6 - 1{,}8783\,10^5x^7 + \\ 65033x^8 - 14868x^9 + 2021{,}3x^{10} - 123{,}86x^{11}, \qquad 0{,}9 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Сегменты $S_k^{(j)}$, $j = \overline{0,4}$, и ошибки $\varepsilon = \log|f - \hat{f}|$ на рис. 3 показаны сплошными линиями. Графики $f^{(j)}$, $j = \overline{0,3}$, отмечены точками. Разрывы в узлах стыковки заметны только для четвертой производной $\hat{f}^{(4)}(x)$ (рис. 3, *в*). Максимальные ошибки на локальных сетках составили: $\varepsilon_{\max} < 10^{-8}$, $x \in [-1{,}2,\ -0{,}15]$, $\varepsilon_{\max} < 10^{-4}$, $x \in [-0{,}15,\ 0{,}9]$, и $\varepsilon_{\max} < 10^{-7}$, $x \in [0{,}9,\ 2]$.

На глобальной равномерной сетке с тринадцатью узлами, из которых пять стыковочные, *качество* КПА $f(x)$ сегментами $S_k^{(j)}(x)$, $x \in [-1{,}5, 1{,}5]$, $k = \overline{1,6}$, с шагом $h = 0{,}25$ заметно *улучшается*, а ошибки *уменьшаются* (рис. 4). Аппроксиманты $\hat{f}^{(j)}(x)$ непрерывны в узлах «склейки» сегментов $S_k^{(j)}(x)$ для $j = \overline{0,3}$, а между стыковочными узлами $j = \overline{0,11}$. Оценка $\hat{f}^{(4)}(x)$ показана пунктиром (рис. 4, *б*).

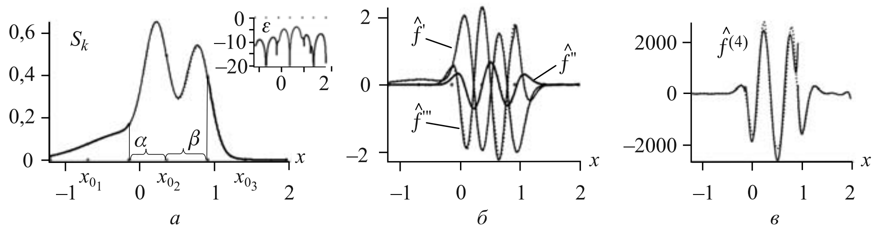

Рис. 3. КПА $f(x)$ тремя МБЭ-многочленами 11-й степени

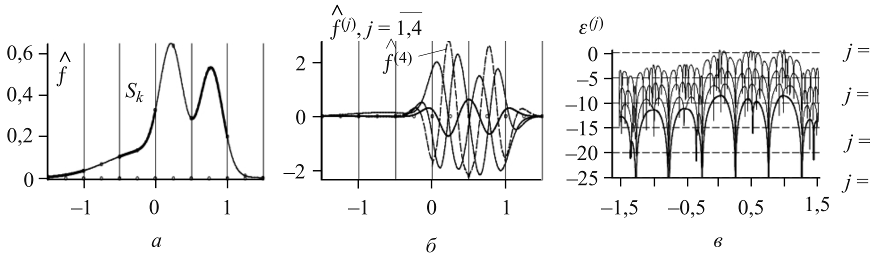

Рис. 4. Сегментация $f(x)$ на равномерной сетке, $h = 0{,}25$ (*а*). Сегменты $S_k^{(j)}(x)$, $j = \overline{1,4}$, приведены к общему масштабу (*б*). Ошибки $\varepsilon_k^{(j)} = \log|f^{(j)} - S_k^{(j)}|$, $j = \overline{0,3}$, $k = \overline{1,6}$ (*в*)

Замечание 4. Приближения многочленами 5-й или 8-й степени с коэффициентами (3.4)–(3.6) используют различные порядки производных аппроксимируемой функции. Например, в (3.4) берется только первая производная, а в (3.5) — первая и вторая. Если в (3.5) или (3.6) взять только шесть первых коэффициентов, то получим аппроксимирующие многочлены пятой степени, в которых используется 2-й или 3-й порядок производных.

5. СГЛАЖИВАНИЕ МБЭ-МНОГОЧЛЕНАМИ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

Многочлены высоких степеней редко используются для сглаживания экспериментальных данных не только по причине большой вычислительной сложности, но и из-за плохой обусловленности нормальной матрицы. Как правило, проблема обусловленности устраняется с помощью многочленов Чебышева или ортогонализацией, а в МБЭ эта задача решается с помощью управляющих параметров [4]. Ниже на примерах сглаживания смоделированных и реальных данных показана эффективность использования МБЭ-многочленов 11-й степени в алгоритме СКПА [7].

Пример 3. Здесь сравниваются результаты сглаживания 12-го порядка одного и того же набора данных алгоритмом СКПА и процедурой *Least-Squares* $(\ldots)$ из пакета Maple. На вход обеих процедур поступала выборка из 250 точек $S:\left\{(x_i\tilde{f}_i)\right\}_{i=1}^{250}$, $x_i\in[1{,}25,1{,}5]$, $\tilde{f}_i=f(x_i)+e(x_i)$, взятых на кривой $f(x)=1+\exp\ \left(-(x-1{,}3)^2/2\big/(0{,}005+0{,}025(x-1{,}3))^2\right)$, моделирующей форму сигнала с ошибками $e(x)\sim N(0,\sigma)$, $\sigma=0{,}25$ (рис. 5, *а*). На выходе получены оценки коэффициентов многочленов $\hat{f}_{\text{МБЭ}}=\sum\limits_{j=0}^{3}\mathbf{b}_j^T\hat{\mathbf{r}}_j$ и $\hat{f}_{\text{МНК}}=\sum\limits_{i=0}^{11}\hat{c}_i(x-x_0)^i$, где $\hat{c}_i$ вычислялись процедурой *LeastSquares* $(\ldots)$. Для обработки данных выборки S использовался только один сегмент. Параметры сетки $\Delta_3^{\alpha\beta}$ выбирались с учетом формы сигнала так, чтобы опорная точка $(x_0,\hat{r}_{00})$ попала в зону пика: $x_0=1{,}3$, $\alpha=-0{,}025$, $\beta=0{,}05$. Для понижения размерности нормальной матрицы данные модифицировались к виду $\left\{\tilde{u}_i=\tilde{f}_i-\mathbf{b}_0^T(\tau_i,\alpha,\beta)\hat{\mathbf{r}}_0\right\}_{i=1}^{250}$, где компоненты вектора $\hat{\mathbf{r}}_0$ определялись по ординатам, ближайшим к линиям $x_\alpha=1{,}275$, $x_0=1{,}3$ и $x_\beta=1{,}35$ (выделены на рис. 5, *а*), в виде $\hat{\mathbf{r}}_{0j}=\Big(\sum\limits_{l=-7}^{l=7}\tilde{f}_{\nu+l}\Big)/15$, $\nu=\alpha,0,\beta$. После этого из решения системы нормальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\mathbf{r}}_{jk}}\sum_{i=1}^{250}\left(\tilde{u}_i-\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}b_{jki}\hat{r}_{jk}\right)^2=0,\quad b_{jki}=Q^j(\tau_i,\alpha,\beta)w_k(\tau_i,\alpha,\beta),\quad (5.1)$$

находились компоненты $\hat{\mathbf{r}}_j$. С учетом $\hat{\mathbf{r}}_0$ получили все коэффициенты многочлена $\hat{f}_{\text{МБЭ}}$:

$$\hat{\mathbf{r}}_0=\begin{bmatrix}1,000000262\\1,971915932\\1,0\end{bmatrix}^T,\quad \hat{\mathbf{r}}_1=\begin{bmatrix}-191699,7190\\-18603,11047\\23710,66570\end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{r}}_2=\begin{bmatrix}4,018285975\cdot10^{10}\\-3,636786824\cdot10^{9}\\-3,257221024\cdot10^{9}\end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{r}}_3=\begin{bmatrix}-2,323141997\cdot10^{15}\\-5,643944450\cdot10^{14}\\-1,208708445\cdot10^{15}\end{bmatrix}.$$

Глобальные относительные ошибки $\rho_e=\left(\sum\limits_{i=1}^{250}(\tilde{f}_i-\hat{f}_i)^2\Big/\sum\limits_{i=1}^{250}\tilde{f}_i^2\right)^{1/2}$ для $\hat{f}_{\text{МБЭ}}$ и $\hat{f}_{\text{МНК}}$ соответственно равны 0,2309264152 и 0,3735155987. Модули невязок $\left|f-\hat{f}_{\text{МНК}}\right|$, $\left|f-\hat{f}_{\text{МБЭ}}\right|$ и кривые $\hat{f}_{\text{МБЭ}}$, $\hat{f}_{\text{МНК}}$ показаны на рис. 5, *а, б*, причем $\max\left|f-\hat{f}_{\text{МБЭ}}\right|=0{,}219<\max\left|f-\hat{f}_{\text{МНК}}\right|=0{,}293$.

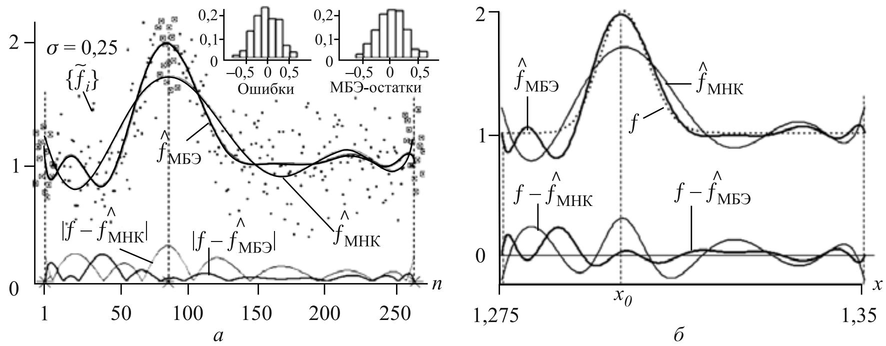

Рис. 5. Сравнение результатов сглаживаний 12-го порядка МБЭ и МНК (Maple)

Относительная ошибка для $\hat{f}_{\text{МБЭ}}$ в точке $x_0 = 1{,}3$ составила 1,5 %, а для $\hat{f}_{\text{МНК}}$ — 29 %.

Более высокая точность $\hat{f}_{\text{МБЭ}}$ получена за счет выбора подходящих значений параметров x_0, α и β, обеспечивающих привязку к данным, их трансформации, а также за счет понижения на три размерности нормальной матрицы.

Пример 4. На поверхности «мексиканской шляпы» $\Omega(x,y) = \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ при $y = 0{,}2$ выделим кривую $f(x)$, $x \in [-6{,}2, 6{,}2]$, и «оцифруем» ее с шагом $h = 0{,}124$: $\{\tilde{f}_i = \Omega(x_i, 0{,}2) + e(x_i)\}_{i=1}^{N}$, $e_i \sim N(0,\sigma)$, $\sigma = 0{,}25$, $N = 100$ (рис. 6, *а*).

Результаты сглаживания этих данных процедурой *LeastSquares* $(\ldots)$ и алгоритмом СКПА (МБЭ-многочлен, $n = 11$, $m = 3$, $x_0 = 0{,}3$, $\alpha = -6$, $\beta = 5{,}8$) показаны на рис. 6. Кривые регрессии $\hat{f}_{\text{МБЭ}}(x)$, $\hat{f}_{\text{МНК}}(x)$ и модули невязок представлены на рис. 6, *б*. Глобальные относительные ошибки ρ_e составили 1,637849 ($\hat{f}_{\text{МБЭ}}$) и 5,608348 ($\hat{f}_{\text{МНК}}$).

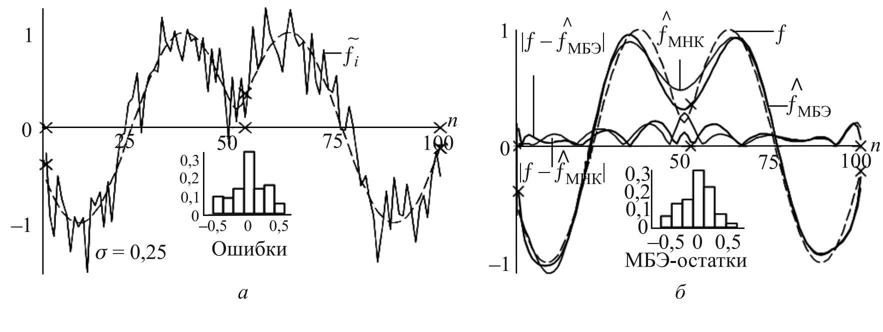

Рис. 6. Сглаживание кривой на «мексиканской шляпе»

Пример 5. Здесь строятся кривые регрессии полного сечения для $\pi^- p$-взаимодействия по данным, взятым из «Европейского физического журнала» [9] и представленным выборкой $\{x_i, \tilde{S}_i\}_{i=1}^{N}$, $N = 277$, на отрезке $1 \leqslant x_i \leqslant 6$ с шагом $h = 5/277$.

Кривая регрессии $\hat{f}_{\text{МНК}}$ 12-го порядка, полученная процедурой *LeastSquares* $(\ldots)$, плохо приближает данные (рис. 7, *а*). На рис. 7, *б* показан результат сглаживания тремя сегментами с использованием МБЭ-модели (см. (1.3)). Регрессионная кривая $\hat{f}_{\text{МБЭ}} \equiv \hat{f}(x)$ ищется на трех локальных сетках в форме *кусочно-полиномиальной* функции

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \hat{f}_1(x), \ x_{0_1} + \alpha_1 \leqslant x \leqslant x_{0_1} + \beta_1, \\ \hat{f}_2(x), \ x_{0_1} + \beta_1 \leqslant x \leqslant x_{0_2} + \beta_2, \\ \hat{f}_3(x), \ x_{0_2} + \beta_2 \leqslant x \leqslant x_{0_3} + \beta_3. \end{cases}$$

Расчет 36 коэффициентов $\hat{f}(x)$ в алгоритме СКПА состоит из пяти этапов [7].

На *первом* этапе подбираются параметры сглаживания $\alpha_k, x_{0_k}, \beta_k$, после чего выборка разделяется на части $\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^{277} = \{\tilde{S}_{i_1}^1\}_{i_1=1}^{87} \cup \{\tilde{S}_{i_2}^2\}_{i_2=87}^{180} \cup$

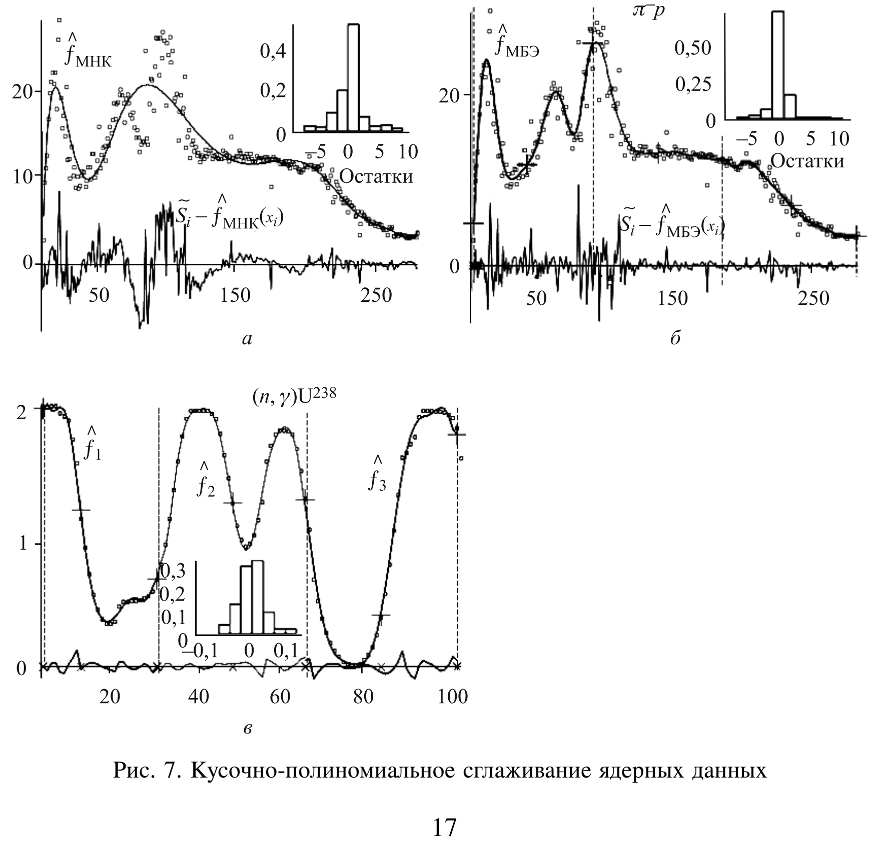

Рис. 7. Кусочно-полиномиальное сглаживание ядерных данных

$\{\tilde S^3_{i_3}\}_{i_3=180}^{277}$ в соответствии с разбиением отрезка на три локальные сетки $[x_{\alpha_k}{<}x_{0_k}{<}x_{\beta_k}]$, $k = \overline{1{,}3}$: [1,01805<1,70698<2,55836], [2,55836<3,40975< 4,24308], [4,24308<5,11252<5,96390] с параметрами $[\alpha_1,\beta_1] = [-0{,}688929, 0{,}851384]$, $[\alpha_2,\beta_2] = [-0{,}851384, 0{,}833333]$ и $[\alpha_3,\beta_3] = [-0{,}887485, 0{,}851384]$.

На *втором* и *третьем* этапах вычисляются компоненты векторов $\hat{\mathbf{r}}_{0_k}$, $k = \overline{1{,}3}$, по средним значениям трех точек из выборки $\{\tilde S_i\}$, ближайших к линиям $x = x_{\nu_k} + \nu_k$, $\nu_k = \alpha_k, x_{0_k}, \beta_k$ (рис. 7, *б*), и выполняется преобразование данных $\{\tilde u^k_{i_k}\} = \{\tilde S^k_{i_k} - \mathbf{b}^T_{0_k}(\tau_{i_k},\alpha_k,\beta_k)\mathbf{r}_{0_k}\}$, где i_k — индексы точек в k-й выборке.

На *четвертом* и *пятом* этапах определяются компоненты векторов $\hat{\mathbf{r}}_{jk}$, $j = \overline{1{,}3}$, $k = \overline{1{,}3}$, в виде решения системы нормальных уравнений (5.1) для каждого сегмента. В результате $\hat f_{\text{МБЭ}}(x)$ выражается тремя многочленами 11-й степени (рис. 7, *б*):

$$\hat f_{\text{МБЭ}}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{3} \mathbf{b}^T_{j1}\mathbf{r}_{j1} & 1{,}00000 \leqslant x \leqslant 2{,}55836, \\ \sum\limits_{j=0}^{3} \mathbf{b}^T_{j2}\mathbf{r}_{j2} & 2{,}55836 \leqslant x \leqslant 4{,}24308, \\ \sum\limits_{j=0}^{3} \mathbf{b}^T_{j3}\mathbf{r}_{j3} & 4{,}24308 \leqslant x \leqslant 6{,}00000 \end{cases}$$

с коэффициентами, равными компонентам векторов $\hat{\mathbf{r}}_{jk}$, $j = \overline{1{,}3}$, $k = \overline{1{,}3}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}}_{01} &= [4{,}782333, 11{,}346667, 25{,}066667]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{02} &= [25{,}066667, 12{,}739333, 11{,}911667]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{03} &= [11{,}911667, 6{,}810000, 3{,}370000]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{11} &= [140{,}721302, 2{,}375055, 1{,}910167]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{12} &= [2{,}845255, -9{,}862379, -11{,}262746]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{13} &= [14{,}415348, 2{,}5980403, 6{,}474845]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{21} &= [1350{,}804291, -22{,}662990, -122{,}655007]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{22} &= [243{,}603729, -91{,}328014, -24{,}481095]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{23} &= [-194{,}710897, 3{,}669323, -10{,}696837]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{31} &= [-3658{,}247263, 1867{,}768143, -3254{,}874348]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{32} &= [-737{,}141991, -373{,}552365, -241{,}171716]^T,\\
\hat{\mathbf{r}}_{33} &= [619{,}800047, 147{,}046146, 89{,}643245]^T.
\end{aligned}$$

Оценка глобальной относительной ошибки в этом примере составила $\rho_e = 0{,}406366367$.

Таблица 4

Параметры сетки и векторы	$\hat{f}_1(x)$	$\hat{f}_2(x)$	$\hat{f}_3(x)$
$\Delta_3^{\alpha_k\beta_k}$	$1{,}04950 < 1{,}48680 <$ $< 2{,}36964$	$2{,}36964 < 3{,}25248 <$ $< 4{,}08581$	$4{,}08581 < 5{,}01815 <$ $< 5{,}90099$
α_k, β_k	$-0{,}43729, 0{,}88284$	$-0{,}88284, 0{,}83333$	$-1{,}17987, 0{,}88284$
$\hat{\mathbf{r}}_{0_k}$	$[2{,}04408, 1{,}24378,$ $0{,}69672]^T$	$[0{,}69672, 1{,}30191,$ $1{,}32295]^T$	$[1{,}32295, 0{,}40737,$ $1{,}83698]^T$
$\hat{\mathbf{r}}_{1_k}$	$[12{,}05011, 0{,}91478,$ $11{,}4726]^T$	$[-326{,}12377, -8{,}45814,$ $27{,}30369]^T$	$[1272{,}84988, 300{,}67546,$ $934{,}75017]^T$
$\hat{\mathbf{r}}_{2_k}$	$[3{,}12796, -3{,}13380,$ $5{,}83214]^T$	$[-49{,}92454, 27{,}04271,$ $1{,}66094]^T$	$[201{,}72791, 100{,}65795,$ $-16{,}69193]^T$
$\hat{\mathbf{r}}_{3_k}$	$[6{,}77837, -1{,}76352,$ $-2{,}76480]^T$	$[-11{,}79781, 10{,}86427,$ $4{,}24216]^T$	$[13{,}23296, 49{,}64309,$ $7{,}46546]^T$

На рис. 7, *в* показаны результаты сглаживания алгоритмом СКПА выборки $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^N$, $N = 100$, представляющей фрагмент данных сечения для реакции (n,γ) на U^{238} в резонансной области, взятых из Nuclear Data from TENDEL 2009. Результаты расчетов компонент $\hat{\mathbf{r}}_{jk}$, $j = \overline{0{,}3}$, для $\hat{f}_k(x)$, узлы сеток $x_{0_k} + \alpha_k < x_{0_k} < x_{0_k} + \beta_k$ и значения α_k, β_k, $k = \overline{1{,}3}$, приведены в табл. 4. Глобальная относительная ошибка $\rho_e = 0{,}05943$.

6. АППРОКСИМАЦИЯ И СГЛАЖИВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ КРИВЫХ

Проблема сегментации кривых и контуров актуальна в широком спектре современных технологий и прикладных исследований. В следующих примерах МБЭ-многочлены 11-й степени используются для аппроксимации и сглаживания кривых, заданных параметрически.

Пример 6. Пусть эллипс $C(x,y)$ задан параметрически с центром $x_c = 3$, $y_c = 2$:

$$x(t) = x_c + 3\sin(t-1), \quad y(t) = y_c - 4\cos(t+1.5), \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Для приближения $x(t)$ и $y(t)$ на равномерной сетке $-h < 0 < h$, $h = 3{,}14$, использовались МБЭ-многочлены $x_D(t) \approx \sum\limits_{i=0}^{11} d_{xi}(h; x_\nu^{(j)})t^i$, $y_D(t) \approx \sum\limits_{i=0}^{11} d_{yi}(h; y_\nu^{(j)})t^i$ с коэффициентами (3.6) и многочлены Тейлора $x_T(t) \approx$

$\sum\limits_{i=0}^{11} x_0^{(i)}/i!t^i$, $y_T(t) \approx \sum\limits_{i=0}^{11} y_0^{(i)}/i!t^i$. В результате получены две пары аппроксимирующих многочленов для $-3{,}14 \leqslant t \leqslant 3{,}14$:

$$\begin{aligned}\hat{x}_D(t) = 0{,}475587 + 1{,}620907t + 1{,}262206t^2 - 0{,}270151t^3 - 0{,}105144t^4 + \\ + 0{,}013506t^5 + 0{,}003490t^6 - 0{,}000321t^7 - 0{,}000060t^8 + \\ + 4{,}336881 \cdot 10^{-5}t^9 + 5{,}137758 \cdot 10^{-7}t^{10} - 3{,}146310 \cdot 10^{-8}t^{11},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_D(t) = 1{,}717051 + 3{,}989980t + 0{,}141474t^2 - 0{,}664997t^3 - 0{,}011785t^4 + \\ + 0{,}033245t^5 + 0{,}000391t^6 - 0{,}000790t^7 - 6{,}729836 \cdot 10^{-5}t^8 + \\ + 1{,}067555 \cdot 10^{-5}t^9 + 5{,}758656 \cdot 10^{-8}t^{10} - 7{,}744870 \cdot 10^{-8}t^{11}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\hat{x}_T(t) = 0{,}475587 + 1{,}620907t + 1{,}262206t^2 - 0{,}270151t^3 - 0{,}105184t^4 + \\ + 0{,}013508t^5 + 0{,}003506t^6 - 3{,}216085 \cdot 10^{-3}t^7 - 6{,}260945 \cdot 10^{-4}t^8 + \\ + 4{,}466785 \cdot 10^{-5}t^9 + 6{,}956605 \cdot 10^{-7}t^{10} + 4{,}060714 \cdot 10^{-8}t^{11},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_T(t) = 1{,}717051 + 3{,}989980t + 0{,}141474t^2 - 0{,}664997t^3 - 0{,}011790t^4 + \\ + 0{,}033250t^5 + 0{,}000393t^6 - 0{,}000792t^7 - 7{,}017580 \cdot 10^{-5}t^8 + \\ + 4{,}466785 \cdot 10^{-5}t^9 + 7{,}797311 \cdot 10^{-8}t^{10} + 9{,}995741 \cdot 10^{-8}t^{11}.\end{aligned}$$

Графики эллипсов $\hat{C}_D(\hat{x}_D, \hat{y}_D)$, $\hat{C}_T(\hat{x}_T, \hat{y}_T)$ и отклонений $\hat{C}_T$ от $\hat{C}_D$ приведены на рис. 8, *а*. Слева вверху изображен график ошибок $\varepsilon_D = \varepsilon(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$, где $\varepsilon_x = |x(t) - \hat{x}_D(t)|$, $\varepsilon_y = |y(t) - \hat{y}_D(t)|$.

Пример приближения эпициклоиды $C(x,y)$ — «трилистника» — $x(t) = 5/3\sin(2t/3) - 2\sin(t/3)$, $y(t) = 5/3\cos(2t/3) + 2\cos(t/3)$, $t \in [-10,10]$, демонстрируется на рис.8, *б, в*. Коэффициенты $\mathbf{d}_x$ и $\mathbf{d}_y$ аппроксимирующих многочленов $\hat{x}_D(t, h; \mathbf{d}_x)$, $\hat{y}_D(t, h; \mathbf{d}_y)$ и $\hat{x}_T(t)$, $\hat{y}_T(t)$ вычислялись по формулам (3.6) на равномерной трехточечной сетке $-h < 0 < h$, $h = 8$ (рис. 8, *в*).

Многочлены $\hat{x}_D$ и $\hat{y}_D$ приближают $x(t)$ и $y(t)$ на всем отрезке с хорошей точностью (рис. 8, *б, в*), несмотря на использование производных только до *третьего* порядка и большой шаг ($h = 10$), тогда как $\hat{x}_T(t)$ и $\hat{y}_T(t)$ заметно отходят от $x(t)$ и $y(t)$ (рис. 8, *в*). В результате только в центральной части кривой $\hat{C}_T(\hat{x}_T, \hat{y}_T)$ хорошо приближает $C(x,y)$ (рис. 8, *б*). Уменьшать ошибку аппроксиманты $\hat{C}_T$ можно за счет увеличения степени многочлена $T(t)$.

Пример 7. На рис. 9 показаны результаты *сглаживания* параметрически заданных кривых $C(x(t), y(t))$ многочленами (1.3) по выборкам точек $\{\tilde{x}_i =$

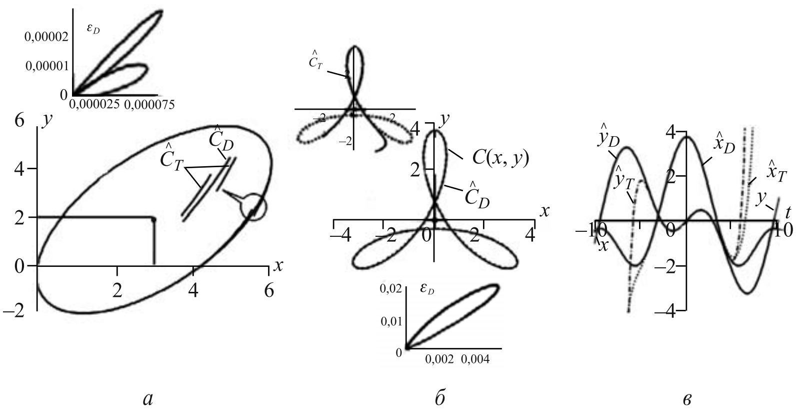

Рис. 8. Приближение эллипса и «трилистника» многочленами $D_{11}(t,h)$ и $T_{11}(t)$

$x(t_i) + e_{x_i}, \tilde{y}_i = y(t_i) + e_{y_i}\}_{i=1}^N$, где $e_x \sim N(0,\sigma_x)$, $e_y \sim N(0,\sigma_y)$. Выборки $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^N$ и $\{\tilde{y}_i\}_{i=1}^N$, $N = 900$, получены из уравнений гипоциклоиды $C(x,y)$

$$
\begin{aligned}
x &= a(1-b)\sin{(bt)} - c\sin{(t-bt)},\\
y &= a(1-b)\cos{(bt)} + c\cos{(t-bt)}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

добавлением нормально распределенных и независимых случайных ошибок e_x и e_y, $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}25$. Точки $(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)$, $\alpha \leqslant t_i \leqslant \beta$ рассеяны вокруг кривой (пунктир на рис. 9, *а*) с параметрами $a = 4$, $b = 1/4$, $c = 3$. После сглаживания $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^N$ и $\{\tilde{y}_i\}_{i=1}^N$ алгоритмом СКПА получены две регрессионные кривые 12-го порядка $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$, $t \in [-12{,}45, 12{,}45]$:

$\hat{x}(t) = -0{,}1211335902 - 1{,}404279746t + 0{,}01637611276t^2 + 0{,}1840720496t^3 -$
$-0{,}0006436321170t^4 - 0{,}004804451173t^5 + 0{,}00001030453999t^6 +$
$+0{,}00005129331182t^7 - 7{,}084598192 \cdot 10^{-8}t^8 - 2{,}500561110 \cdot 10^{-7}t^9 +$
$+1{,}73053745 \cdot 10^{-10}t^{10} + 4{,}651895966 \cdot 10^{-10}t^{11}$;

$\hat{y}(t) = 5{,}968094887 + 0{,}0185927286t - 0{,}8479801909t^2 - 0{,}001126504403t^3 +$
$0{,}03114786858t^4 + 0{,}00002349527171t^5 - 0{,}0004400727080t^6 -$
$-2{,}126049481 \cdot 10^{-7}t^7 + 0{,}000002623312693t^8 + 8{,}767328787 \cdot 10^{-10}t^9 -$
$-5{,}636638760 \cdot 10^{-9}t^{10} - 1{,}3770214 \cdot 10^{-12}t^{11}$.

Кривые $\hat{C}(\hat{x},\hat{y})$ и $C(x,y)$ изображены на рис. 9, *б*. Внизу справа показаны остатки $\mathrm{res}_i = (\tilde{x}_i - \hat{x}_i, \tilde{y}_i - \hat{y}_i)$, слева — ошибки $\varepsilon_i = (x_i - \hat{x}_i, y_i - \hat{y}_i)$. Заметное отклонение $\hat{C}$ от C вблизи точки $(0,-5)$ (рис. 9, *б*) объясняется порядком модели сглаживания, и для устранения такой ошибки надо увеличивать степень $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$ или использовать КПА.

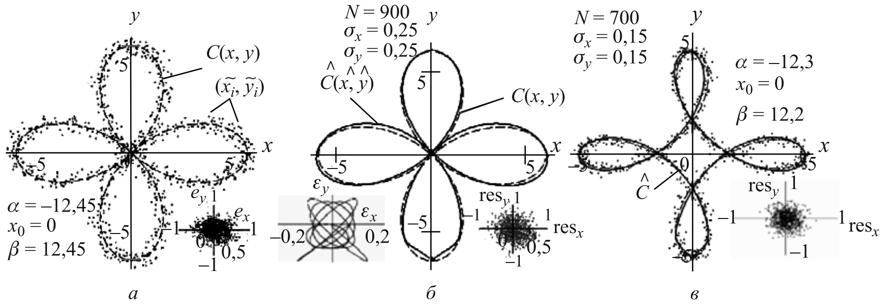

Рис. 9. Сглаживание гипоциклоиды многочленами $D_{11\downarrow 3}(x, \alpha, \beta; \mathbf{r})$

На рис. 9, *в* представлены результаты среднеквадратичной МБЭ-аппроксимации 12-го порядка по выборкам $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{700}$ и $\{\tilde{y}_i\}_{i=1}^{700}$, $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}15$, полученным на кривой (6.1) при $a = 4$, $b = 1/4$, $c = 2$, с параметрами МБЭ-сглаживания $\alpha = -12{,}3$, $\beta = 12{,}2$, $x_0 = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый подход к решению задач полиномиальной аппроксимации гладких функций и сглаживания экспериментальных данных *МБЭ-многочленами высоких степеней*. За счет *внутренней связи* независимой переменной с параметрами в конструкции МБЭ-многочленов *синтезированы* свойства многочленов Тейлора в узлах *трехточечной* сетки и многочленов Лагранжа второй степени. МБЭ-многочлены обладают рядом свойств, аналогичных свойствам многочленов Чебышева.

В рамках метода базисных элементов [4] получены *новые формулы* для расчета коэффициентов многочленов высоких степеней на *неравномерной* трехточечной сетке.

Коэффициенты МБЭ-многочлена n-й степени, аппроксимирующего непрерывную функцию f, вычисляются по узловым значениям производных с максимальным порядком $m = \lfloor n/3 \rfloor$ и по *непрерывным параметрам* сетки α, β и x_0, выбор которых влияет на *точность* и *устойчивость* расчетов. В случае среднеквадратичной аппроксимации α и β являются параметрами *сглаживания*. Введение управляющих параметров в базисные функции расширяет границы применения классических методов аппроксимации и позволяет решать многие задачи в режиме реального времени.

Получены *новые формулы* для коэффициентов МБЭ-многочленов, представляющих функцию $f(x) \in C^{(3)}$ ее разложением по степеням $(x - x_0)$ на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$. По сравнению с многочленом Тейлора 11-й степени, эти формулы используют меньший порядок производных, $m = 3 \ll 11$, и зависят от шага *равномерной* трехточечной сетки $x_0 - h < x_0 < x_0 + h$. Проверка формул осуществлена расчетами с помощью алгоритмов КПА и СКПА.

Эффективность расчетов с использованием МБЭ-многочленов высокой степени подтверждена нетривиальными примерами решения задач аппроксимации гладких функций и сглаживания экспериментальных данных, а также сравнением с аналогичными результатами, полученными процедурой *LeastSquares* $(\ldots)$ из пакета Maple.

МБЭ и формулы вычисления коэффициентов для МБЭ-многочленов могут быть использованы в качестве инструмента для решения задач прикладной математики в теоретических исследованиях, а также для решения практических задач в широком спектре научных и технических разработок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чебышев П. Л.* Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
2. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. С. 267.
3. *Dikoussar N. D.* Function Parameterization by Using 4-Point Transforms // Comp. Phys. Commun. 1997. V. 99. P. 235–254.
4. *Дикусар Н. Д.* Метод базисных элементов // Матем. моделирование. 2010. Т. 22, № 12. С. 115–136 (Math. Models and Comp. Simulations. 2011. V. 3, No. 4. P. 492–507).
5. *Калиткин Н. Н., Шляхов И. М.* В-сплайны высоких степеней // Матем. моделирование. 1999. Т. 11, № 11. С. 64–74.
6. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
7. *Дикусар Н. Д.* Кусочно-полиномиальная аппроксимация шестого порядка с автоматическим обнаружением узлов // Матем. моделирование. 2014. Т. 26, № 3. С. 31–48.
8. *Franke R.* Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods // Mathematics of Computation. 1982. V. 38. P. 181–200.
9. European Physical Journal C. Review of Particle Physics. Springer, 2000. P. 235.

Получено 10 июня 2014 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 31.07.2014.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,6. Уч.-изд. л. 1,9. Тираж 260 экз. Заказ № 58306.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/