

P1-2014-95

С. А. Авраменко, Г. Агакишиев, А. В. Беляев,
В. Н. Печенов, В. С. Рихвицкий

**БЫСТРЫЙ МЕТОД ПОИСКА НАЧАЛЬНОГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРЯМЫХ ТРЕКОВ
ДЛЯ ПРОВОЛОЧНЫХ И СТРИПОВЫХ ДЕТЕКТОРОВ**

Авраменко С. А. и др.

P1-2014-95

Быстрый метод поиска начального приближения прямых треков для проволочных и стриповых детекторов

Для детекторов с чувствительными элементами в виде отрезков прямых — проволочных детекторов, дрейфовых трубок, кремниевых стриповых детекторов и т. п. — существует задача нахождения треков по сработавшим элементам (трекинг). Ввиду большого количества как самих треков, так и элементов детекторов в современных экспериментах число комбинаций избранных чувствительных элементов может быть очень большим.

Оказывается, если выбрать число чувствительных элементов детектора, равное четырем, то при определенных условиях найдется прямая, которая будет строго пересекать все выбранные четыре элемента (четыре скрещивающиеся прямые).

Предлагаемый «метод четырех прямых» может служить, в частности, для быстрого определения начального приближения и/или отбора элементов, принадлежащих прямолинейному треку. Метод успешно применяется на установке HADES в GSI.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2014

Avramenko S. A. et al.

P1-2014-95

Fast Search Method for Initial Approximation of Straight Tracks of the Wire and Strip Detectors

For detectors with sensitive elements in the form of straight line segments, i. e. for wire detectors, drift tubes, silicon strip detectors, etc., there is a task to find straight tracks for triggered items (tracking). Due to the large number of tracks as well as elements of the detectors in modern experiments, the number of combinations of selected sensitive elements can be very large.

It turns out that if the number of sensitive elements of the detector is chosen equal to four, then under some conditions there is a straight line which strictly crosses all the selected four elements (four overlapping straight lines).

The proposed "method of four straight lines" can be used, in particular, for rapid determination of initial approximation and/or selection of items which belong to a straight track. The method has been successfully used at the facility HADES, GSI.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Для проволочных детекторов, например, на установках HADES (GSI, Дармштадт) [1], NIS-GIBS (ЛФВЭ ОИЯИ) [2] существует задача определения треков по сработавшим проволочкам (трекинг). Похожая задача характерна и для прочих детекторов с чувствительными элементами в виде отрезков прямых — дрейфовых трубок, кремниевых стриповых детекторов и т. п. Часто решается задача минимизационного определения параметров прямой, *ближайшей* к сработавшим линейным элементам. Однако, ввиду большого количества как самих треков, так и элементов детекторов, в современных экспериментах число комбинаций избранных чувствительных элементов может оказаться очень большим. При этом использование традиционных минимизационных алгоритмов поиска может приводить к значительным затратам времени.

В этом контексте интересен случай нахождения прямой, *ближайшей* к четырем элементам (проволочкам). Оказывается, что если выбрать число чувствительных элементов детектора, равное четырем, то при определенных их конфигурациях найдется прямая, *строго пересекающая все четыре эти элемента*.

В 1879 г. Герман Шуберт (1848–1911) в работе «Kalkül der abzählenden Geometrie» («Логика или методы исчислительной геометрии») [3] сформулировал и решил «задачу Шуберта»: «*В трехмерном пространстве задано четыре попарно скрещивающихся прямых. Сколько существует прямых, пересекающих все четыре заданные прямые?*», в которой продемонстрировал идеи своей новой науки. Для него было важно, что количество решений задачи в «общем положении» структурно устойчиво, т. е. не меняется при «малом шевелении» исходных данных. В 1900 г. «строгое обоснование исчислительной геометрии Шуберта» включено Давидом Гильбертом в число 23 «важнейших математических задач современности» под номером 15. В настоящее время считается, что эта задача «решена частично».

Задача настоящей работы состоит в нахождении уравнения этой общей пересекающей («метод четырех прямых»).

НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕЙ ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙ

Используем параметрическое представление пространственных прямых. Так,

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{V}_i \cdot t_i + \mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{pmatrix} \cdot t_i + \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, 4),$$

где для i -й прямой \mathbf{Q}_i — вектор, определяющий на ней любую точку; $\mathbf{P}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^T$ — фиксированная точка; $\mathbf{V}_i = (L_i, M_i, N_i)^T$ — направляющий вектор (не обязательно единичной длины); t — параметр.

Считаем векторы $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4$ и $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ заданными. Произвольно выберем из четырех прямых две (с номерами 1 и 2 на рис. 1). Проведем через них вспомогательную прямую, задавая ее двумя точками, а именно: $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{V}_1 \cdot t_1 + \mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{V}_2 \cdot t_2 + \mathbf{P}_2$. Тогда в параметрическом виде (с параметром τ) вспомогательную прямую (искомую общую пересекающую) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{Q}(\tau) = [(\mathbf{V}_2 t_2 + \mathbf{P}_2) - (\mathbf{V}_1 t_1 + \mathbf{P}_1)] \tau + (\mathbf{V}_1 t_1 + \mathbf{P}_1). \quad (1)$$

Параметр τ отвечает при этом произвольной точке на вспомогательной прямой. Пусть вспомогательная прямая проходит дополнительно и через точки \mathbf{Q}_3 и \mathbf{Q}_4 , т. е. является общей пересекающей. Рис. 1 иллюстрирует взаимное расположение прямых в пространстве.

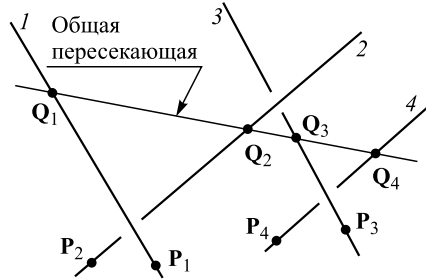


Рис. 1. Взаимное расположение прямых в пространстве

Тогда должно совместно выполняться

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\tau_3) &= \mathbf{Q}_3(t_3), \\ \mathbf{Q}(\tau_4) &= \mathbf{Q}_4(t_4), \end{aligned}$$

или — по компонентам —

$$\begin{aligned} [(L_2 t_2 + X_2) - (L_1 t_1 + X_1)] \tau_3 + (L_1 t_1 + X_1) &= L_3 t_3 + X_3, \\ [(M_2 t_2 + Y_2) - (M_1 t_1 + Y_1)] \tau_3 + (M_1 t_1 + Y_1) &= M_3 t_3 + Y_3, \\ [(N_2 t_2 + Z_2) - (N_1 t_1 + Z_1)] \tau_3 + (N_1 t_1 + Z_1) &= N_3 t_3 + Z_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(L_2t_2 + X_2) - (L_1t_1 + X_1)] \tau_4 + (L_1t_1 + X_1) = L_4t_4 + X_4, \\
& [(M_2t_2 + Y_2) - (M_1t_1 + Y_1)] \tau_4 + (M_1t_1 + Y_1) = M_4t_4 + Y_4, \\
& [(N_2t_2 + Z_2) - (N_1t_1 + Z_1)] \tau_4 + (N_1t_1 + Z_1) = N_4t_4 + Z_4.
\end{aligned}$$

Эти равенства представляют собой систему шести уравнений второй степени относительно шести неизвестных $t_1, t_2, t_3, t_4, \tau_3, \tau_4$:

$$\begin{aligned}
L_2t_2\tau_3 - L_1t_1\tau_3 + (X_2 - X_1)\tau_3 + L_1t_1 - L_3t_3 - (X_3 - X_1) &= 0, \\
M_2t_2\tau_3 - M_1t_1\tau_3 + (Y_2 - Y_1)\tau_3 + M_1t_1 - M_3t_3 - (Y_3 - Y_1) &= 0, \\
N_2t_2\tau_3 - N_1t_1\tau_3 + (Z_2 - Z_1)\tau_3 + N_1t_1 - N_3t_3 - (Z_3 - Z_1) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2t_2\tau_4 - L_1t_1\tau_4 + (X_2 - X_1)\tau_4 + L_1t_1 - L_4t_4 - (X_4 - X_1) &= 0, \\
M_2t_2\tau_4 - M_1t_1\tau_4 + (Y_2 - Y_1)\tau_4 + M_1t_1 - M_4t_4 - (Y_4 - Y_1) &= 0, \\
N_2t_2\tau_4 - N_1t_1\tau_4 + (Z_2 - Z_1)\tau_4 + N_1t_1 - N_4t_4 - (Z_4 - Z_1) &= 0.
\end{aligned}$$

Переменные t_3, t_4, τ_3, τ_4 легко исключаются. После элементарных алгебраических преобразований получим систему из двух квадратных уравнений с двумя неизвестными t_1 и t_2 :

$$\begin{aligned}
B_1t_1t_2 + D_1t_1 + E_1t_2 + F_1 &= 0, \\
B_2t_1t_2 + D_2t_1 + E_2t_2 + F_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты приобретут значения

$$\begin{aligned}
B_1 &= \mathbf{V}_2 \cdot [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_3], \\
B_2 &= \mathbf{V}_2 \cdot [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_4], \\
D_1 &= (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3) \cdot [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_3], \\
D_2 &= (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_4) \cdot [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_4], \\
E_1 &= (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \cdot [\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3], \\
E_2 &= (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1) \cdot [\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_4], \\
F_1 &= \mathbf{V}_3 \cdot [(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)], \\
F_2 &= \mathbf{V}_4 \cdot [(\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)].
\end{aligned} \tag{3}$$

Каждое уравнение системы (2) описывает кривую второго порядка [4] — равностороннюю гиперболу с асимптотами, параллельными осям координат. Такие гиперболы могут иметь не более двух точек пересечения. Три примера из множества взаимного расположения подобных гипербол приведены на рис. 2, *a–в*. Сплошной линией изображается «первая» гипербола, пунктирной — «вторая». Уравнения гипербол в форме $(t_1 - \tilde{t}_1)(t_2 - \tilde{t}_2) - 1 = 0$ (где \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 — координаты их центра) даны в подписи.

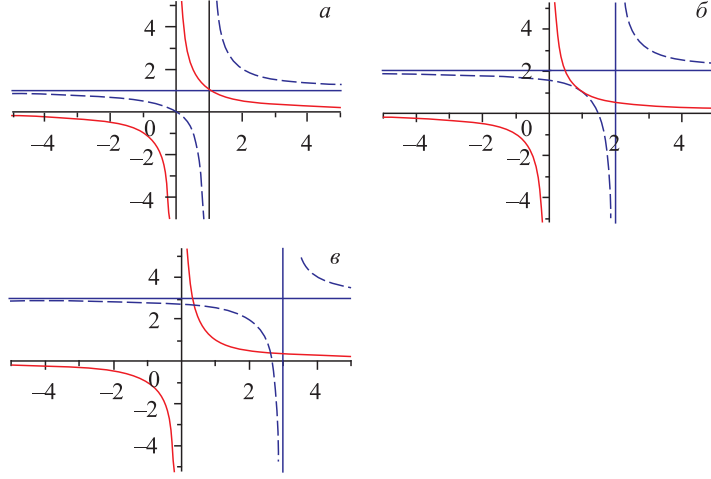


Рис. 2. Три примера из множества взаимного расположения гипербол. а) Нет пересечений: $(t_1 - 0)(t_2 - 0) - 1 = 0$, $(t_1 - 1)(t_2 - 1) - 1 = 0$. б) Одно касание: $(t_1 - 0)(t_2 - 0) - 1 = 0$, $(t_1 - 2)(t_2 - 2) - 1 = 0$. в) Два пересечения: $(t_1 - 0)(t_2 - 0) - 1 = 0$, $(t_1 - 3)(t_2 - 3) - 1 = 0$

Задача нахождения искомых параметров t_1 и t_2 сводится к поиску точек пересечения гипербол системы (2). Решения даются симметричными формулами:

$$t_1 = \frac{-\left(\left|\begin{array}{cc} B_1 & F_1 \\ B_2 & F_2 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc} D_1 & E_1 \\ D_2 & E_2 \end{array}\right|\right) \pm \sqrt{\left(\left|\begin{array}{cc} B_1 & F_1 \\ B_2 & F_2 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc} D_1 & E_1 \\ D_2 & E_2 \end{array}\right|\right)^2 - 4 \cdot \left|\begin{array}{cc} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cc} E_1 & F_1 \\ E_2 & F_2 \end{array}\right|}}{2 \cdot \left|\begin{array}{cc} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{array}\right|}, \quad (4)$$

$$t_2 = \frac{-\left(\left|\begin{array}{cc} B_1 & F_1 \\ B_2 & F_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} D_1 & E_1 \\ D_2 & E_2 \end{array}\right|\right) \mp \sqrt{\left(\left|\begin{array}{cc} B_1 & F_1 \\ B_2 & F_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} D_1 & E_1 \\ D_2 & E_2 \end{array}\right|\right)^2 - 4 \cdot \left|\begin{array}{cc} B_1 & E_1 \\ B_2 & E_2 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cc} D_1 & F_1 \\ D_2 & F_2 \end{array}\right|}}{2 \cdot \left|\begin{array}{cc} B_1 & E_1 \\ B_2 & E_2 \end{array}\right|}.$$

Поскольку прямые 1 и 2 (см. рис. 1) были выбраны произвольно, они — равноправны, решение для t_2 отличается от решения для t_1 только взаимной заменой коэффициентов D_i и E_i ($i = 1, 2$). Непосредственно раскрывая внешне разные детерминанты, стоящие под радикалами, можно убедиться, что эти детерминанты тождественны. Знаки перед радикалами должны быть противоположными, поскольку гиперболы выражают обратную пропорциональную зависимость. Знаменатели в (4) должны быть отличны от нуля, кроме вырожденных случаев, когда у гипербол оказываются одними и теми же какие-либо асимптоты.

Знак детерминантов и отличие знаменателей от нуля в (4), по сути дела, накладывают исчерпывающие условия на взаимное положение четырех пространственных прямых, при котором существуют вещественные, имеющие физический смысл решения:

$$\left(\left| \begin{array}{cc|cc} B_1 & F_1 & D_1 & E_1 \\ B_2 & F_2 & D_2 & E_2 \end{array} \right| - 4 \cdot \left| \begin{array}{cc} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} E_1 & F_1 \\ E_2 & F_2 \end{array} \right| \right) > 0,$$

$$\left| \begin{array}{cc} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{array} \right| \neq 0,$$

$$\left| \begin{array}{cc} B_1 & E_1 \\ B_2 & E_2 \end{array} \right| \neq 0.$$

В проволочном детекторе чувствительные скрещивающиеся линейные элементы (проволоки) имеют ограниченную длину, и искомое решение должно давать прямую, пересекающую сработавшие проволоки внутри самого детектора. Это естественное условие для выбора одного из двух решений. Подобным образом — с использованием формул (4) — находятся решения для детекторов MDC установки HADES.

Из (3) видно, что если первые три прямые (по сути, некоторые три из четырех) находятся в параллельных плоскостях, то $B_1 = 0$. Такой случай мы рассматриваем, формулы (4) при этом применимы.

Есть частный, но практически важный случай, когда все четыре скрещивающиеся прямые находятся в параллельных плоскостях (как на установке NIS-GIBS). При этом, как видно из (3), $B_1 = B_2 = 0$. Здесь вместо системы квадратных уравнений (2) получаем линейную:

$$\begin{aligned} D_1 t_1 + E_1 t_2 + F_1 &= 0, \\ D_2 t_1 + E_2 t_2 + F_2 &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет единственное решение

$$t_1 = \frac{\left| \begin{array}{cc} E_1 & F_1 \\ E_2 & F_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} D_1 & E_1 \\ D_2 & E_2 \end{array} \right|}, \quad t_2 = \frac{\left| \begin{array}{cc} D_1 & F_1 \\ D_2 & F_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} D_1 & E_1 \\ D_2 & E_2 \end{array} \right|}, \quad (5)$$

если определитель системы отличен от нуля. Равенство нулю определителя в (5) означает те или иные случаи параллельности исходных четырех прямых (чувствительных элементов). Для практики это несущественно: чтобы получить общую пересекающую, следует отбирать именно скрещивающиеся прямые.

Итак, отделив некоторым образом нужную пару решений из (4) или взяв единственное решение (5), получим искомую общую пересекающую (1).

Примеры.

Пример 1. Из статьи В. А. Кириченко [3].

Прямые l_1 и l_2 , пересекающиеся в точке a , образуют плоскость P ; прямые l_3 и l_4 , пересекающиеся в точке a' , образуют плоскость P' . Прямая, образованная пересечением плоскостей P и P' , пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3 и l_4 . Прямая, проходящая через точки a и a' , также пересекает указанные четыре прямые. Случай считается «специальным», поскольку исходные четыре прямые попарно пересекаются. Доказано, что при «малом шевелении» исходных прямых, после чего они станут скрещивающимися, характер решения не изменится: по-прежнему общую пересекающую можно будет провести *двумя* способами (см. рис. 3).

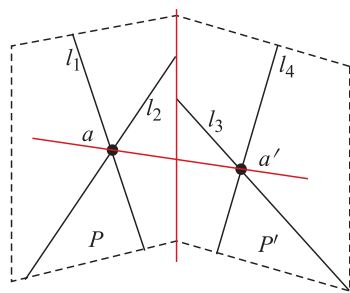


Рис. 3. Иллюстрация задачи Шуберта

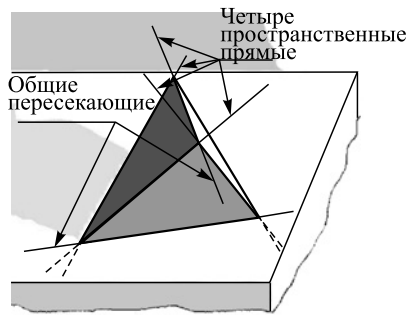


Рис. 4. Тетраэдр

Пример 2. Тетраэдр — наглядный вариант двух вещественных решений системы (2). Этот случай — «специальный»: здесь четыре пространственные прямые не скрещиваются, а пересекаются и находятся при этом в четырех плоскостях (гранях тетраэдра) (см. рис. 4).

Пример 3. Другая модель (четыре прямые попарно скрещиваются) двух решений системы (2) построена с помощью вязальных спиц (см. рис. 5).

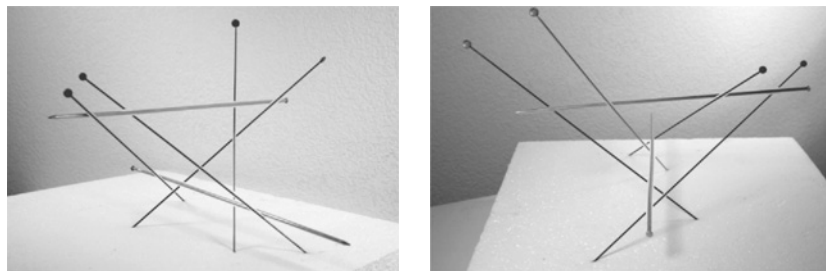


Рис. 5. Инсталляция из вязальных спиц

Пример 4. Численный эксперимент с выборкой в 10^6 событий, при котором в объеме куба случайным образом генерировались четыре прямые, показал, что примерно для 87% конфигураций сгенерированных прямых существуют два вещественных решения. В остальных 13% случайных конфигураций знак детерминантов в (4) оказывался отрицательным. Так, для одной из таких «отрицательных» конфигураций (рис. 6) были заданы пространственные прямые:

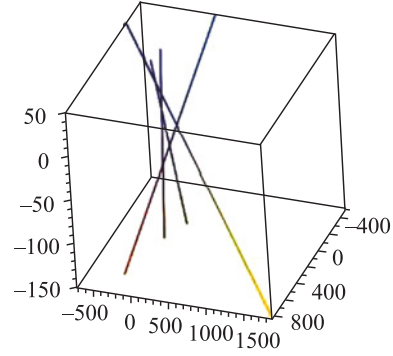


Рис. 6. Положение прямых в пространстве

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -137,488 \\ -24,998 \\ 162,524 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 85,554 \\ -70,105 \\ -75,476 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -114,633 \\ 52,907 \\ 20,352 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 55,592 \\ 17,379 \\ -50,728 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 73,400 \\ -93,524 \\ 89,281 \end{pmatrix} t_3 + \begin{pmatrix} -5,760 \\ 36,967 \\ -97,153 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 67,488 \\ 161,005 \\ -12,429 \end{pmatrix} t_4 + \begin{pmatrix} 18,956 \\ -70,075 \\ 0,310 \end{pmatrix}.$$

Для них получены уравнения гипербол (коэффициенты округлены):

$$93076t_1t_2 + 1003620t_1 + 504425t_2 - 365205 = 0,$$

$$3041680t_1t_2 + 911827t_1 - 1409060t_2 - 478109 = 0.$$

Гиперболы оказались непересекающимися (рис. 7 и 8), поскольку детерминант, вычисленный при попытке нахождения решения, оказался отрицательным: $\det = -3,251 \cdot 10^{23} < 0$.

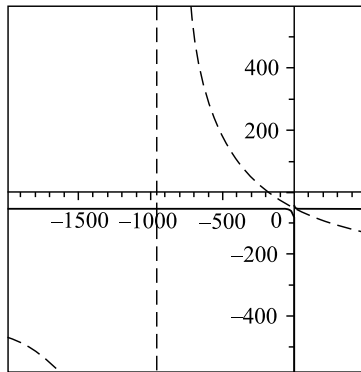


Рис. 7. Взаимное расположение гипербол

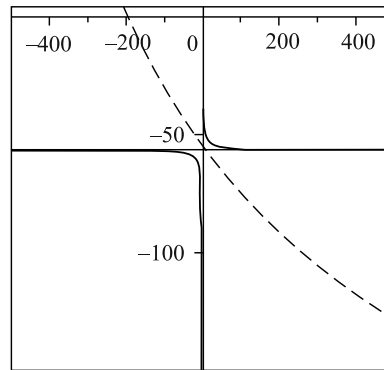


Рис. 8. Область начала координат (укрупненно)

Пример 5. Здесь приводятся прямые, соответствующие пересекающимся гиперболам, для которых имеются два вещественных решения (рис. 9, 10). Прямые заданы в виде

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения гипербол:

$$\begin{aligned} -3t_1t_2 + 2t_1 - 6t_2 + 2 &= 0, \\ -t_1t_2 - 6t_1 + 4t_2 + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Значение детерминанта: $\det = 136 > 0$. Соответственно, определяются параметры t_1 и t_2 :

$$t_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{136}}{10}, \quad t_2 = \frac{8 \mp \sqrt{136}}{-9}.$$

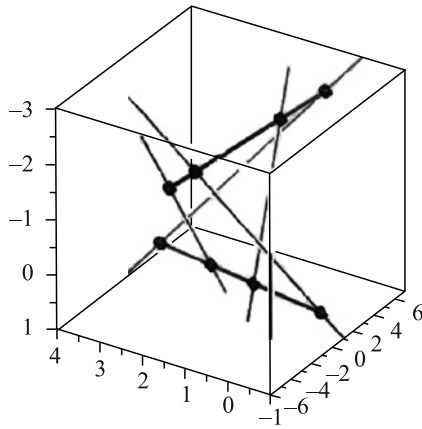


Рис. 9. Четыре пространственные прямые и две их общие пересекающиеся

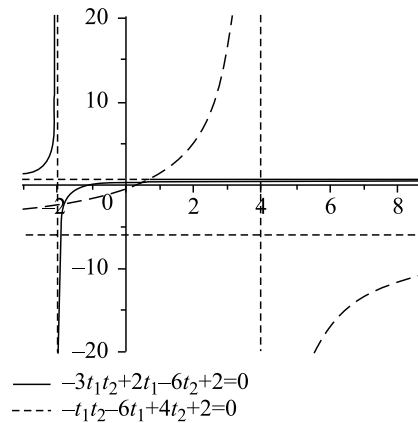


Рис. 10. Взаимное расположение пересекающихся гипербол

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Метод четырех прямых» предназначен для быстрого определения начального приближения и/или отбора фрагментов, принадлежащих прямолинейному треку, на детекторах с линейными чувствительными элементами.

Метод успешно реализован на установке HADES. Он оказался особо востребован для реконструкции вторичных треков, т. е. треков с вершиной, отстоящей на некотором расстоянии от вершины взаимодействия, например, при соударениях Au–Au. Его использование позволило существенно улучшить результаты трекинга. Например, более чем в два раза увеличилось число реконструируемых распадов $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ и улучшилось их разрешение по эффективной массе. При этом расчет параметров начального приближения для прямолинейных треков занимает малое время в общей процедуре трекинга.

Особо привлекательно использование «линейной части» «метода четырех прямых» на установках, в которых чувствительные скрещивающиеся линейные элементы (провода) находятся в параллельных плоскостях (например, на установке NIS-GIBS).

Благодарности. Авторы выражают благодарность Г. А. Ососкову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agakishiev G. et al.* The High-Acceptance Dielectron Spectrometer HADES // *Eur. Phys. J. A.* 2009. V. 41. P. 287.
2. *Аверьянов А. В. и др.* Исследование гиперядер в пучках нуклотрона // *Ядерная физика.* 2008. Т. 71, №12. С. 2137–2145.
3. *Кириченко В. А.* Исчислительная геометрия // *Квант.* 2014. № 1. С. 2–6.
4. *Ефимов Н. В.* Квадратичные формы и матрицы. М.: Наука, 1972.

Получено 10 декабря 2014 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 03.03.2015.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,9. Тираж 285 экз. Заказ № 58491.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/