P2-2015-9

Б. М. Барбашов, А. Б. Пестов

РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Барбашов Б. М., Пестов А. Б. P2-2015-9
Решение релятивистской задачи о движении заряда
в скрещенных электрическом и магнитном полях

Методом первых интегралов найдено решение задачи о релятивистском движении заряда во взаимно перпендикулярных и однородных электрическом и магнитном полях при любом значении безразмерного управляющего параметра, равного отношению напряженности магнитного поля к напряженности электрического.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2015

Barbashov B. M., Pestov A. B. P2-2015-9
Solution of the Relativistic Problem on the Motion of a Charge
in the Crossed Electric and Magnetic Fields

By the method of the first integrals we give a solution of the relativistic problem on the motion of the charged particles in the crossed electric and magnetic fields at arbitrary value of a dimensionless controlling parameter which is equal to the ratio of the magnetic strength to the electric one.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, при ускорении электронов с ростом их энергии возрастают потери на излучение. Для получения дополнительной информации об этом явлении может представлять интерес картина поведения электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях при варьировании безразмерного управляющего параметра a (равного, по определению, отношению напряженности магнитного поля к напряженности электрического поля, $a = |H|/|E|$, $0 < a < \infty$). С этой целью попытаемся найти решение уравнений, описывающих релятивистское движение заряда во взаимно перпендикулярных и однородных электрическом и магнитном полях при любом значении управляющего параметра. Эта задача и составляет содержание настоящей заметки. По отношению к лабораторной системе отсчета и лабораторному времени точное решение обсуждаемой задачи известно только для значения управляющего параметра, равного единице, и в нерелятивистском пределе [1]. Отметим также, что полное решение рассматриваемой задачи методом первых интегралов представляет интерес и для задач ускорительной физики.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим движение заряда e в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях. Направление $\mathbf{E}$ выберем по оси y, а направление $\mathbf{H}$ по оси z: $\mathbf{E} = (0, E, 0)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Поскольку $(\mathbf{EH}) = \mathbf{0}$, то поля скрещенные. Введем безразмерный управляющий параметр $a = H/E$, характерное время $T = mc/eE$, соответствующую ему частоту $\nu = 1/T$, безразмерные компоненты скорости

$$\beta_x = v_x/c, \quad \beta_y = v_y/c, \quad \beta_z = v_z/c, \quad \beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 < 1,$$

тогда релятивистское уравнение движения [1] заряда e с массой m

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{vE})\}$$

запишется покомпонентно как система уравнений на β_x, β_y, β_z:

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta_x}{dt} &= \nu\sqrt{1-\beta^2}\,(a\beta_y - \beta_x\beta_y),\\
\frac{d\beta_y}{dt} &= \nu\sqrt{1-\beta^2}\,(1 - a\beta_x - \beta_y^2),\\
\frac{d\beta_z}{dt} &= \nu\sqrt{1-\beta^2}\,(-\beta_y\beta_z).
\end{aligned} \tag{1}$$

Найти решение системы уравнений (1) позволяют ее первые интегралы, для их получения запишем (1) в виде системы отношений

$$\frac{d\beta_x}{a\beta_y - \beta_x\beta_y} = \frac{d\beta_y}{1 - a\beta_x - \beta_y^2} = \frac{d\beta_z}{-\beta_y\beta_z} = \nu\sqrt{1-\beta^2}\,dt.$$

Умножая первое равенство на $2\beta_y$, находим

$$\frac{2d\beta_x}{a - \beta_x} = \frac{d(\beta_y^2)}{1 - a\beta_x - \beta_y^2}.$$

Умножим в полученном равенстве числитель и знаменатель первой дроби на β_x и по свойству равных отношений

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{c + \mu a}{d + \mu b},$$

справедливому при любом $\mu \neq 0$, получим (у нас выбрано $\mu = 1$)

$$\frac{2d\beta_x}{a - \beta_x} = \frac{d(\beta_x^2 + \beta_y^2)}{1 - \beta_x^2 - \beta_y^2}.$$

Далее воспользуемся равенствами

$$d(\beta_x^2 + \beta_y^2) = -d(1 - \beta_x^2 - \beta_y^2), \quad \frac{2d\beta_x}{a - \beta_x} = -\frac{d(\beta_x - a)^2}{(\beta_x - a)^2}$$

и получим легко интегрируемое уравнение

$$\frac{d(\beta_x - a)^2}{(\beta_x - a)^2} = \frac{d(1 - \beta_x^2 - \beta_y^2)}{1 - \beta_x^2 - \beta_y^2}.$$

Уравнение

$$\frac{d\beta_x}{a\beta_y - \beta_x\beta_y} = \frac{d\beta_z}{-\beta_y\beta_z}$$

также легко интегрируемо. Таким образом, первыми интегралами системы (1) будут следующие функции:

$$\frac{1-\beta_x^2-\beta_y^2}{(\beta_x-a)^2}, \quad \frac{\beta_z}{(\beta_x-a)},$$

поэтому положим их константами движения A^2, B и будем иметь

$$1-\beta_x^2-\beta_y^2 = A^2\,(\beta_x-a)^2, \tag{2}$$

$$\beta_z = B\,(\beta_x-a). \tag{3}$$

Запишем уравнение (2) в виде уравнения эллипса

$$\frac{(\beta_x-\frac{aA^2}{1+A^2})^2}{F^2}+\frac{\beta_y^2}{G^2}=1,$$

где

$$F=\frac{ap}{1+A^2}, \quad G=\frac{ap}{\sqrt{1+A^2}}, \quad p=\frac{\sqrt{1+(1-a^2)A^2}}{a}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что уравнение (2) допускает следующее параметрическое представление, определяемое основными тригонометрическими функциями,

$$\beta_x-\frac{aA^2}{1+A^2}=F\,\sin\varphi, \quad \beta_y=G\,\cos\varphi \tag{5}$$

и, согласно (3), β_z также выражается через $\sin\varphi$. Таким образом, задача интегрирования уравнений (1) сводится к интегрированию уравнения, которому подчиняется φ. Найдем это уравнение. Из (2) и (3) следует, что

$$\sqrt{1-\beta^2}=\sqrt{A^2-B^2}\,|\beta_x-a|. \tag{6}$$

Далее из (5) находим

$$\frac{d\beta_x}{dt}=F\,\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}=\frac{F}{G}\,\beta_y\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Подставляя это равенство в первое из уравнений системы (1), получаем после сокращения на β_y и учета (6):

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon\nu\sqrt{1-\gamma^2}\,(1+A^2)(a-\beta_x)^2,$$

где $\varepsilon=1$, если $a-\beta_x>0$, $\varepsilon=-1$, если $a-\beta_x<0$,

$$\sqrt{A^2-B^2}=\sqrt{1+A^2}\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Так как согласно (5)

$$a-\beta_x=\frac{a}{1+A^2}(1-p\sin\varphi),$$

то искомое уравнение записывается в виде

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\varepsilon\nu a^2\sqrt{1-\gamma^2}}{1+A^2}(1-p\sin\varphi)^2. \tag{7}$$

С помощью уравнения (7) найдем уравнения для нахождения x, y, z как функций φ. Так как согласно (4) и (5)

$$\beta_x=\frac{1}{c}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{c}\frac{dx}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{a}{1+A^2}(A^2+1+p\sin\varphi-1),$$

то

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{\varepsilon c}{\nu a\sqrt{1-\gamma^2}}\left(\frac{1+A^2}{(1-p\sin\varphi)^2}-\frac{1}{1-p\sin\varphi}\right). \tag{8}$$

Уравнения для y и z имеют следующий вид:

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{\varepsilon c\sqrt{1+A^2}}{\nu a\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{p\cos\varphi}{(1-p\sin\varphi)^2}, \tag{9}$$

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{\varepsilon cB}{\nu a\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{1}{1-p\sin\varphi}. \tag{10}$$

Таким образом, задача интегрирования уравнений (7)–(10), определяющих траекторию движения, сводится к нахождению интегралов

$$I_1(p,\varphi)=\int\frac{d\varphi}{1-p\sin\varphi},\quad I_2(p,\varphi)=\int\frac{d\varphi}{(1-p\sin\varphi)^2},$$

которые, как нетрудно убедиться, связаны алгебраическим соотношением

$$I_1(p,\varphi)+(p^2-1)I_2(p,\varphi)=\frac{p\cos\varphi}{1-p\sin\varphi}. \tag{11}$$

При $p=1\,(a=1)$ формула (11) неприменима, и нужно воспользоваться формулами

$$I_1(1,\varphi)=\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi},\quad I_2(1,\varphi)=\frac{2}{3}\,\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{1}{1-\sin\varphi}+\frac{1}{3}\,\tan\varphi. \tag{12}$$

Приведем формулы для первого интеграла при других значениях параметра a. Согласно определению

$$1-p^2=\frac{(a^2-1)(1+A^2)}{a^2},$$

поэтому будем различать два случая. Если $a > 1$, тогда $1 - p^2 > 0$ и

$$I_1(p, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \arctan\left(\frac{\sin\varphi - p\cos\varphi - p}{\sqrt{1-p^2}(1+\cos\varphi)}\right). \tag{13}$$

При $a < 1$, когда $p^2 - 1 > 0$, получаем

$$I_1(p, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \ln\left(1 - \frac{2\sqrt{p^2-1}(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi + (\sqrt{p^2-1} - p)(1+\cos\varphi)}\right). \tag{14}$$

2. ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ

При различных значениях управляющего параметра (a) траектории будут различными. Соответственно этому будем рассматривать три случая. Пусть управляющий параметр равен единице $(a = 1)$. Тогда из (7)–(10) и (12) получаем

$$\frac{2}{3}\frac{1}{\cos\varphi}\frac{1}{1-\sin\varphi} + \frac{1}{3}\tan\varphi = \frac{\nu\sqrt{1-\gamma^2}}{1+A^2}t + C_0, \tag{15}$$

$$x = \frac{c}{\nu\sqrt{1-\gamma^2}}\left((1+A^2)\left(\frac{2}{3}\frac{1}{\cos\varphi}\frac{1}{1-\sin\varphi} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{3}\tan\varphi\right) - \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) + C_1, \tag{16}$$

$$y = \frac{c\sqrt{1+A^2}}{\nu\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{1}{1-\sin\varphi} + C_2, \tag{17}$$

$$z = -\frac{Bc}{\nu\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} + C_3, \tag{18}$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования. Из (15) и (16) следует, что

$$x = ct - \frac{c}{\nu\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} + C.$$

Как уже отмечалось выше, рассмотренный только что случай, когда управляющий параметр равен единице $(a = 1)$, был исследован также в [1]. Приведенное там решение отнесено к параметру p_y. Так как

$$p_y = \frac{mc\beta_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

то связь между двумя параметризациями устанавливается с помощью (5) и (6). Приведем результат:

$$p_y = \frac{mc}{\sqrt{1-\gamma^2}} \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Если управляющий параметр больше единицы ($a > 1$), то в этом случае $\varepsilon = 1$ и согласно (7)

$$I_2(p,\varphi) = \frac{\nu a^2 \sqrt{1-\gamma^2}}{1+A^2}\, t,$$

что в соответствии с (11) и (13) дает

$$\frac{p\cos\varphi}{1-p\sin\varphi} - \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \arctan\left(\frac{\sin\varphi - p\cos\varphi - p}{\sqrt{1-p^2}(1+\cos\varphi)}\right) = \\ = \varepsilon\nu(1-a^2)\sqrt{1-\gamma^2}\, t + C_0. \quad (19)$$

Аналогично из уравнений (8), (11) и (13) следует, что

$$x = \frac{c}{\nu a(1-a^2)\sqrt{1-\gamma^2}} \left\{ \frac{a^2 p\cos\varphi}{1-p\sin\varphi} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \arctan\left(\frac{\sin\varphi - p\cos\varphi - p}{\sqrt{1-p^2}(1+\cos\varphi)}\right)\right\} + C_1. \quad (20)$$

Сравнивая (19) и (20), находим следующее соотношение:

$$x = act - \frac{c}{\nu a\sqrt{1-\gamma^2}} \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \arctan\left(\frac{\sin\varphi - p\cos\varphi - p}{\sqrt{1-p^2}(1+\cos\varphi)}\right). \quad (21)$$

Для координат y и z получаем соответственно

$$y = \frac{c\sqrt{1+A^2}}{a\nu\sqrt{1-\gamma^2}} \frac{1}{1-p\sin\varphi} + C_2, \quad (22)$$

$$z = -\frac{Bc}{\nu a\sqrt{1-\gamma^2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \arctan\left(\frac{\sin\varphi - p\cos\varphi - p}{\sqrt{1-p^2}(1+\cos\varphi)}\right)\right\} + C_3. \quad (23)$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда управляющий параметр меньше единицы ($a < 1$) и, следовательно, $a - \beta_x$ не будет знакоопределенной величиной.

Так как все разъяснения уже сделаны ранее, то просто приведем последовательно необходимые соотношения:

$$\frac{p\cos\varphi}{1-p\sin\varphi} - \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\ln\left(1-\frac{2\sqrt{p^2-1}(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi+(\sqrt{p^2-1}-p)(1+\cos\varphi)}\right) = $$
$$= \varepsilon\nu(1-a^2)\sqrt{1-\gamma^2}\,t + C_0;$$

$$x = \frac{\varepsilon c}{\nu a(1-a^2)\sqrt{1-\gamma^2}}\left\{\frac{a^2 p\cos\varphi}{1-p\sin\varphi} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\ln\left(1-\frac{2\sqrt{p^2-1}(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi+(\sqrt{p^2-1}-p)(1+\cos\varphi)}\right)\right\} + C_1, \quad (24)$$

и в другой форме

$$x = act - \frac{\varepsilon c}{\nu a\sqrt{1-\gamma^2}}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\ln\left(1-\frac{2\sqrt{p^2-1}(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi+(\sqrt{p^2-1}-p)(1+\cos\varphi)}\right)\right\}; \quad (25)$$

$$y = \frac{\varepsilon c\sqrt{1+A^2}}{a\nu\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{1}{1-p\sin\varphi} + C_2; \quad (26)$$

$$z = -\frac{\varepsilon Bc}{\nu a\sqrt{1-\gamma^2}}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\ln\left(1-\frac{2\sqrt{p^2-1}(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi+(\sqrt{p^2-1}-p)(1+\cos\varphi)}\right)\right\} + C_3. \quad (27)$$

Таким образом, все необходимые соотношения установлены.

Когда начальные данные заданы, то интегралы движения выражаются через них. Пусть $\beta_x(t_0) = \beta_x^0$ и аналогично для других составляющих скорости, тогда по непрерывности получаем

$$A^2 = \frac{1-(\beta_x^0)^2-(\beta_y^0)^2}{(a-\beta_x^0)^2}, \quad B = \frac{\beta_z^0}{\beta_x^0 - a}.$$

Следовательно, задачу можно упростить, если наложить условие $\beta_z^0 = 0$, так как тогда $B = 0$ и движение будет происходить в плоскости x, y.

В заключение отметим следующее. Хорошо известна связь между классической механикой и квантовой механикой [2], поэтому представляет интерес рассмотреть вопрос о движении заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях на квантовом уровне. К исследованию задачи о движении одной заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле может быть также применен метод собственного времени [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967 (*Landau L. D., Lifshitz E. M.* The Classical Theory of Field. Pergamon Press, 1971).
2. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Высш. шк., 1963 (*Blokhintsev D. I.* Quantum Mechanics. Dordrecht: D. Reidel Publ., N.Y.: Gordon and Breach, 1964).
3. *Богуславский С. А.* Избранные труды по физике. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

Получено 27 февраля 2015 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 13.03.2015.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,68. Уч.-изд. л. 0,82. Тираж 325 экз. Заказ № 58497.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/