Р4-2016-58

В. В. Пупышев*

ДВУМЕРНОЕ ЯДЕРНО-КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ МЕДЛЕННОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

* E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В. Р4-2016-58
Двумерное ядерно-кулоновское рассеяние медленной квантовой частицы

Исследуется двумерное рассеяние медленной квантовой частицы суперпозицией кулоновского и центрального короткодействующего потенциалов. Дан анализ низкоэнергетических асимптотик всех радиальных волновых функций, парциальных фаз и сечений рассеяния такой частицы. Предложены два способа вычисления длины рассеяния и эффективного радиуса.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2016

Pupyshev V. V. P4-2016-58
Two-Dimensional Nuclear-Coulomb Scattering of a Slow Quantum Particle

The two-dimensional scattering of a slow quantum particle by the superposition of the Coulomb and short-range potential is studied. The analysis of low-energy asymptotics of all radial wave-functions, partial phase-shifts and cross-sections is given. Two methods for calculation of the scattering length and effective radius are proposed.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2016

ВВЕДЕНИЕ

Объект нашего исследования — упругое рассеяние квантовой частицы p_1 в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ неподвижным силовым центром O, лежащим в той же плоскости и воздействующим на эту частицу посредством суперпозиции $V^c + V^s$ кулоновского потенциала V^c и центрального короткодействующего потенциала V^s. Следуя терминологии, принятой в ядерной физике, такое рассеяние назовем двумерным ядерно-кулоновским рассеянием.

Двумерное ядерно-кулоновское рассеяние и его низкоэнергетические параметры: длина рассеяния и эффективный радиус, исследовались только в работе [1] и лишь в частном случае, названном «s-волновым». Даже этот частный случай не упоминается в современной монографии по теории рассеяния [2]. Поэтому исчерпывающий анализ двумерного ядерно-кулоновского рассеяния представляется актуальным и необходимым для расширения теории двумерного рассеяния.

Выполним такой анализ. В следующем разделе сформулируем и обсудим исходную задачу Шредингера для радиальной волновой функции квантовой частицы. В разд. 2 сведем эту задачу к цепочке рекуррентных и энергонезависимых дифференциальных уравнений первого порядка с простыми начальными условиями. Эти цепочки исследуем в разд. 3 и используем в разд. 4 для вывода низкоэнергетических асимптотик функции эффективного радиуса, радиальных волновых функций, парциальных фаз и сечений рассеяния квантовой частицы. Итоги выполненных исследований подведем в заключении.

1. ИСХОДНАЯ РАДИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ШРЕДИНГЕРА

Начнем с определений параметров, аргументов и потенциалов.

В плоскости $\mathcal{P}$ введем стандартным образом полярную систему координат с начальной точкой, совпадающей с силовым центром O. Положение квантовой частицы p_1 в плоскости $\mathcal{P}$ зададим ее полярными координатами $\mathbf{r} = (r, \varphi)$. Символами m_1, z_1, E и $\mathbf{k}$ обозначим массу, кулоновский заряд, полную энергию и волновой вектор этой частицы. Считаем, что волновой вектор $\mathbf{k}_0$ ее начального состояния имеет нулевой азимутальный угол, а силовой центр O обладает кулоновским зарядом Z. По определению заряды z_1

и Z кратны заряду электрона. Пусть $\hbar$ — постоянная Планка. Положим

$$k = |\mathbf{k}| \equiv \sqrt{\frac{2\,m_1 E}{\hbar^2}}\,, \quad R \equiv \frac{\hbar^2}{2m_1 z_1 Z}\,, \quad q \equiv k|R|\,,$$
$$\alpha \equiv \operatorname{sign} R\,, \quad \eta \equiv \frac{1}{2kR} = \frac{\alpha}{2q}\,, \quad \rho \equiv kr = q\frac{r}{|R|}\,, \quad v \equiv \sqrt{8\rho|\eta|}\,.$$

Здесь и далее q — безразмерное волновое число частицы p_1, η — параметр Зоммерфельда, а ρ и v — безразмерные неотрицательные переменные. Размерная полная энергия E вычисляется по формулам

$$E = \frac{2m_1}{\hbar^2}\,k^2 = \frac{2m_1}{(\hbar R)^2}\,q^2\,.$$

Кулоновский потенциал V^c определим равенством $V^c(r) = z_1 Z/r$. Придется различать два случая: случай кулоновского отталкивания ($\alpha = 1$) и случай кулоновского притяжения ($\alpha = -1$). Для краткости записи используем символ Кронекера $\delta_{i\alpha}$ и формулы с верхними и нижними знаками плюс и (или) минус. В таких формулах все верхние знаки берутся в случае $\alpha = 1$, а все нижние — в случае $\alpha = -1$. Например, формула

$$A^{\pm} = a^{\pm} + \left\{ \begin{array}{c} b \\ c \end{array} \right\}$$

означает, что $A^{+} = a^{+} + b$, если $\alpha = 1$, и $A^{-} = a^{-} + c$, если $\alpha = -1$.

Считаем, что центральный короткодействующий потенциал $V^s(r)$ зависит только от переменной r, принадлежит классу $\mathbb{C}^0_{(0,\infty]}$ функций, непрерывных в области $r > 0$, и при любом показателе β, большем двух, удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0} r^2\,|V^s(r)| = 0, \\ &\lim_{r\to\infty} r^{\beta}\,|V^s(r)|\left[\delta_{1,\alpha}\exp\left(4\sqrt{r/|R|}\right) + \delta_{-1,\alpha}\right] = 0, \quad \alpha = \pm 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Поэтому безразмерный потенциал V, определенный формулами

$$V(v) \equiv (2m_1 R^2/\hbar^2)\,V^s(r = x|R|)\,, \quad x = 2\rho|\eta| = v^2/4\,, \quad r = v^2|R|/4\,,$$

подчиняется условиям

$$\lim_{v\to 0} v^4|V(v)| = 0\,, \quad V(v) \in \mathbb{C}^0_{(0,\infty]}\,, \quad \alpha = \pm 1\,, \tag{2}$$

и при любом $\beta > 2$ удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{v\to\infty} v^{2\beta}\,|V(v)|\,[\,\delta_{1,\alpha}\,\exp(2v) + \delta_{-1,\alpha}\,] = 0\,, \quad \alpha = \pm 1\,. \tag{3}$$

Поясним условия (1). Если $r \to 0$, то в обоих случаях ($\alpha = 1$ или $\alpha = -1$) модуль потенциала $V^s(r)$ может иметь конечный предел либо неограниченно возрастать, но не быстрее, чем функция r^{-2}. В случае $\alpha = -1$, $r \to \infty$ модуль потенциала $V^s(r)$ должен убывать быстрее функции $r^{-\beta}$ при любом ее параметре β, удовлетворяющем неравенству $\beta > 2$. В случае $\alpha = 1$, $r \to \infty$ модуль потенциала $V^s(r)$ должен убывать гораздо быстрее, а именно, быстрее произведения экспоненциальной функции $\exp\left(-4\sqrt{r/|R|}\right)$ и функции $r^{-\beta}$ с произвольным параметром β, подчиненным неравенству $\beta > 2$. В некоторых случаях ограничения на допустимое поведение потенциалов $V^s(r)$ и $V(v)$ при больших значениях их аргументов можно ослабить. Все такие случаи укажем. Причину зависимости условий (1) и (3) от параметра α выявим в конце п. 3.1.

Перейдем к формулировке радиальной задачи Шредингера в случае суммарного потенциала $V^c(r) + V^s(r)$, не зависящего от угла φ. Как известно из теории двумерного рассеяния [2, 3], в этом случае двумерная задача Шредингера для волновой функции частицы p_1 допускает разделение переменных r и φ и сводится к бесконечной, но счетной ($2\lambda = -1, 1, \ldots$) совокупности радиальных краевых задач Шредингера. В кулоновских переменных ρ и η каждая из таких задач является одномерным уравнением Шредингера

$$\begin{gathered}\left[\partial^2_\rho - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} - 4\eta^2\, V(\sqrt{8\rho|\eta|})\right] u_\lambda(\rho,\eta) = 0\,, \\ \rho > 0\,, \quad \eta \in (-\infty, \infty)\,, \end{gathered} \tag{4}$$

с условием

$$\lim_{\rho \to 0} u_\lambda(\rho,\eta)/F_\lambda(\rho,\eta) = N(\eta) \tag{5}$$

и условием

$$u_\lambda(\rho,\eta) = \sin\left[\,\rho - \eta \ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta^c_\lambda(\eta) + \delta_\lambda(\eta)\,\right] + O(\rho^{-1})\,, \quad \rho \to \infty\,. \tag{6}$$

В этих условиях F_λ и δ^c_λ — известные регулярная функция Кулона и кулоновская фаза [4–6], а нормировочный множитель N и фаза δ_λ рассеяния потенциалом V в кулоновском поле $2\eta/\rho$ являются искомыми. Непрерывное в области $0 \leqslant \rho < \infty$ решение u_λ задачи (4)–(6) называется регулярной радиальной волновой функцией частицы p_1 в состоянии рассеяния $|q,\lambda\rangle$ с квантовыми числами q и λ.

Радиальная краевая задача Шредингера (4)–(6) будет исходной для наших исследований. Для полноты ее постановки следует пояснить строение сечения $\sigma^{cs}_\lambda(\eta)$ рассеяния частицы p_1 в состоянии $|q,\lambda\rangle$. Такое сечение определяется известными формулами [3]

$$\sigma^{cs}_\lambda(\eta) = 8\,R\,\eta\,\varepsilon_\lambda\,\left\{\sin\left[\,\delta^c_\lambda(\eta) + \delta_\lambda(\eta)\,\right]\right\}^2\,, \quad \varepsilon_\lambda \equiv 2 - \delta_{-1,2\lambda}\,,$$

и в силу тождества

$$[\sin(\delta_\lambda^c + \delta_\lambda)]^2 \equiv [\sin\delta_\lambda^c]^2 + [\sin\delta_\lambda]^2 + 2\sin\delta_\lambda^c\,\sin\delta_\lambda\,\cos(\delta_\lambda^c + \delta_\lambda)$$

является суммой слагаемых

$$\begin{gathered} \sigma_\lambda^c(\eta) \equiv 8\,R\,\eta\,\varepsilon_\lambda\,\sin^2\delta_\lambda^c(\eta)\,, \\ \sigma_\lambda^{\rm int}(\eta) \equiv 16\,R\,\eta\,\varepsilon_\lambda\,\sin\delta_\lambda^c(\eta)\,\sin\delta_\lambda(\eta)\,\cos\,[\,\delta_\lambda^c(\eta) + \delta_\lambda(\eta)\,] \end{gathered} \tag{7}$$

и слагаемого

$$\sigma_\lambda(\eta) \equiv 8\,R\,\eta\,\varepsilon_\lambda\,\sin^2\delta_\lambda(\eta) = \frac{\sigma_\lambda^u(\eta)}{[\,{\rm ctg}\,\delta_\lambda(\eta)\,]^2 + 1}\,, \quad \sigma_\lambda^u(\eta) \equiv 8\,R\,\eta\,\varepsilon_\lambda\,. \tag{8}$$

Слагаемое σ_λ^c — сечение рассеяния одним кулоновским потенциалом. Слагаемое $\sigma_\lambda^{\rm int}$ — вклад от интерференции рассеяния кулоновским потенциалом и потенциалом V. Слагаемое σ_λ — сечение рассеяния этим потенциалом в кулоновском поле. При любом η такое сечение не превышает своего унитарного предела σ_λ^u. Как и в ядерной физике, функции $\delta_\lambda(\eta)$ и $\sigma_\lambda(\eta)$ называем парциальными ядерно-кулоновскими фазой и сечением.

Обсудим задачу Шредингера (4)–(6). Для этого сначала напомним определение предела низких энергий. Пределом низких энергий называется предел $q \to 0+$ при фиксированных значениях кулоновского параметра R и квантового числа λ. В этом пределе $|\eta| \to \infty$. В случае потенциала $V(v)$, $v = \sqrt{8\rho|\eta|}$, тождественно равного нулю, уравнению (4) удовлетворяют линейно независимые волновые функции Кулона $F_\lambda(\rho,\eta)$ и $G_\lambda(\rho,\eta)$ полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \ldots$, детально исследованные в работах [4–6]. Как доказано в работе [7], при любых допустимых значениях λ и η и условиях

$$\lim_{v\to 0} v^4\,V(v) = 0\,, \quad V(v) \in \mathbb{C}^0_{(0,\infty]}\,, \quad \lim_{v\to\infty} v^4\,V(v) = 0 \tag{9}$$

задача (4)–(6) имеет единственное, причем непрерывное в области $0 \leqslant \rho < \infty$ решение u_λ. Короткодействующий потенциал V по определению удовлетворяет условиям (2) и (3), а значит, и условиям (9). Вывод низкоэнергетических ($q \to 0$, $|\eta| \to \infty$) приближений функций $\delta_\lambda(\eta)$, $\sigma_\lambda(\eta)$, $N(\eta)$ и $u_\lambda(\rho,\eta)$ в рамках задачи (4)–(6) — довольно сложная проблема. Для ее наиболее простого решения в разд. 2 и 3 предлагается специальный асимптотический в пределе $q \to 0$ метод. Первый этап этого метода заключается в переформулировке задачи (4)–(6) и реализуется в следующем разделе.

2. РЕДУКЦИЯ РАДИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ШРЕДИНГЕРА

В настоящем разделе дана редукция радиальной задачи Шредингера (4)–(6) к системам линейных дифференциальных уравнений первого порядка, наиболее удобных для вывода и анализа низкоэнергетических асимптотик фазы δ_λ, сечения σ_λ и волновой функции u_λ. Такая редукция реализуется в три этапа. Каждому из них посвящен отдельный пункт.

2.1. Амплитудные функции. Кратко изложим и обсудим метод амплитудных функций, предложенный в работе [7]. В этой работе, в отличие от настоящей, использовался потенциал $V(x)$, $x \equiv v^2/4 = 2\rho|\eta|$.

В методе амплитудных функций кулоновские функции F_λ и G_λ считаются известными, а амплитудные функции c и s — искомыми. Решение u_λ задачи Шредингера (4)–(6) представляется произведением нормировочного множителя N и функции U:

$$u_\lambda(\rho,\eta) = N(\eta)\, U(\rho,\eta)\,, \quad U(\rho,\eta) \equiv c(\rho,\eta)\, F_\lambda(\rho,\eta) + s(\rho,\eta)\, G_\lambda(\rho,\eta)\,. \tag{10}$$

Подстановкой (10) уравнение Шредингера (4) с начальным условием (5) сводится к задаче Коши для амплитудных функций c и s на полуоси $\rho \geqslant 0$, а именно, к недиагональной системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \partial_\rho c(\rho,\eta) &= \ \ 4\eta^2\, V(\sqrt{8\rho|\eta|})\, [\, c(\rho,\eta)\, F_\lambda(\rho,\eta) + s(\rho,\eta)\, G_\lambda(\rho,\eta)\,]\; G_\lambda(\rho,\eta)\,, \\ \partial_\rho s(\rho,\eta) &= -4\eta^2\, V(\sqrt{8\rho|\eta|})\, [\, c(\rho,\eta)\, F_\lambda(\rho,\eta) + s(\rho,\eta)\, G_\lambda(\rho,\eta)\,]\; F_\lambda(\rho,\eta)\,, \end{aligned} \tag{11}$$

с начальными условиями

$$c(\rho,\eta) = 1\,, \quad s(\rho,\eta) = 0\,, \quad \rho = 0\,. \tag{12}$$

В работе [7] доказано следующее утверждение, справедливое и в рассматриваемом случае короткодействующего потенциала V.

Теорема 1. *Если потенциал $V(v)$, $v = \sqrt{8\rho|\eta|}$, удовлетворяет условиям (9), то при любом $\lambda \geqslant -1/2$ и любом $\eta \in (-\infty,\infty)$ задача Коши (11), (12) однозначно разрешима в классе функций, непрерывных на всей полуоси $\rho \geqslant 0$, а компоненты c и s решения $\{c,s\}$ этой задачи не имеют общих нулей.*

Как показано в той же работе [7], в силу теоремы 1 представления множителя N, фазы δ_λ и сечения σ_λ через амплитудные функции c и s являются однозначными и непрерывными. Приведем такие представления: множитель N определяется формулами

$$N(\eta) = \lim_{\rho\to\infty} N(\rho,\eta)\,, \qquad N(\rho,\eta) \equiv \left[\, c^2(\rho,\eta) + s^2(\rho,\eta)\,\right]^{-1/2}\,, \tag{13}$$

тангенс фазы рассеяния δ_λ — формулами

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(\eta) = \lim_{\rho\to\infty} \operatorname{tg}\delta_\lambda(\rho,\eta)\,, \quad \operatorname{tg}\delta_\lambda(\rho,\eta) \equiv s(\rho,\eta)/c(\rho,\eta), \tag{14}$$

а сечение (8) вычисляется как

$$\sigma_\lambda(\eta) = \lim_{\rho\to\infty} \sigma_\lambda(\rho,\eta)\,, \quad \sigma_\lambda(\rho,\eta) \equiv \sigma^u_\lambda(\eta)\,\left[\, s(\rho,\eta)\, N(\rho,\eta)\,\right]^2 . \tag{15}$$

В представленном выше методе амплитудных функций [7] для полного решения краевой задачи Шредингера (4)–(6) необходимо сначала найти решение $\{c, s\}$ задачи Коши (11), (12), а затем определить множитель N, фазу δ_λ и сечение σ_λ по формулам (13)–(15) и, наконец, вычислить радиальную волновую функцию u_λ по формулам (10).

Стоит напомнить, что функции $\delta_\lambda(\rho,\eta)$ и $\sigma_\lambda(\rho,\eta)$ обладают прозрачным физическим смыслом: значения $\delta_\lambda(\rho_d,\eta)$ и $\sigma_\lambda(\rho_d,\eta)$ этих функций в некоторой точке $\rho = \rho_d$ являются фазой и сечением в случае потенциала $V(v)$, «обрезанного» в точке $v_d = \sqrt{8\rho_d|\eta|}$.

Выявим причины, существенно затрудняющие численный анализ задачи Коши (11), (12) и последующее вычисление функций δ_λ, σ_λ и u_λ в пределе низких энергий ($q \to 0$, $|\eta| \to \infty$).

При малых значениях аргумента ρ функции Кулона имеют асимптотики [4]

$$\begin{aligned} &F_\lambda(\rho,\eta) \sim C_\lambda(\eta)\,\rho^{\lambda+1}\,, \\ &G_\lambda(\rho,\eta) \sim \frac{1}{C_\lambda(\eta)\,\rho^\lambda} \left\{ \begin{array}{lll} -\ln\rho\,, & 2\lambda = -1\,, & \\ (2\lambda+1)^{-1}\,, & 2\lambda > -1\,, & \rho \to 0\,, \end{array} \right. \end{aligned} \tag{16}$$

в которых неаналитическая функция $C_\lambda(\eta)$ переменой η определяется формулой

$$C_\lambda(\eta) \equiv 2^\lambda\, \frac{|\Gamma(\lambda+1+\imath\,\eta)|}{\Gamma(2\lambda+2)}\, \exp(-\pi\eta/2)\,. \tag{17}$$

Поэтому квадрат функции C_λ имеет асимптотику

$$C^2_\lambda(\pm|\eta|) \sim \frac{\pi}{(\nu!)^2}\, q^{-\nu} \left\{ \begin{array}{c} \exp\left(-\pi/q\right) \\ 1 \end{array} \right\}, \quad \nu = 2\lambda+1\,, \quad \frac{q}{|\lambda|} \to 0\,. \tag{18}$$

Следовательно, при $q \to 0$ в случае кулоновского отталкивания ($\alpha \equiv \operatorname{sign}\eta = 1$) функция C_λ быстро убывает, а в случае кулоновского притяжения ($\alpha = -1$) сходится к числу $\sqrt{\pi}$, если $2\lambda = -1$, и возрастает как $O(q^{-\lambda-1/2})$, если $2\lambda > -1$.

Вследствие свойств (16)–(18) кулоновских функций в случае $q \to 0$ и $\rho \ll 1$ правые части уравнений (11) содержат как быстро убывающий множитель F^2_λ, так и быстро возрастающий множитель G^2_λ. Поэтому при уменьшении волнового числа q численное интегрирование таких уравнений в области $\rho \ll 1$ становится все более сложной задачей.

В пределе $\rho \to \infty$ функции Кулона имеют асимптотики [4]

$$
\begin{gathered}
F_\lambda(\rho,\eta) \sim \sin\chi_\lambda(\rho,\eta)\,, \quad G_\lambda(\rho,\eta) \sim \cos\chi_\lambda(\rho,\eta)\,, \\
\chi_\lambda(\rho,\eta) \equiv \rho - \eta\ln(2\rho) - \pi\lambda/2 + \delta^c_\lambda(\eta)\,,
\end{gathered}
$$

в которых модуль фазы $\delta^c_\lambda(\eta)$ неограниченно возрастает, если $q/|\lambda| \to 0$:

$$
\delta^c_\lambda(\eta) \sim \frac{\eta}{2}\ln\left[(\lambda+1)^2+\eta^2\right] - \eta + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\lambda+1}\,, \quad \frac{q}{|\lambda|} \to 0\,. \tag{19}
$$

Следовательно, в пределе $q \to 0$, но в области $\rho \gg 1$ произведения F^2_λ, $F_\lambda G_\lambda$ и G^2_λ быстро осциллируют. Поэтому следует ожидать, что при тех же условиях $q \to 0$ и $\rho \gg 1$ правые части уравнений (11), а значит, и производные $\partial_\rho c$, $\partial_\rho s$, и функции c, s будут быстро осциллировать. Анализ быстро осциллирующих функций — одна из наиболее трудных задач численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Функция G_λ является суммой [4]

$$
G_\lambda(\rho,\eta) = -\frac{h^c(\eta)}{C^2_{-1/2}(\eta)}\,F_\lambda(\rho,\eta) + \frac{1}{q^\lambda\,C_\lambda(\eta)}\,\Theta_\lambda(\rho,\eta)\,. \tag{20}
$$

В этой сумме Θ_λ — четная функция аргумента q, а $h^c(\eta)$ — неаналитическая и четная функция переменной η. Эта функция содержит в качестве слагаемого вещественную часть Ψ-функции, а в пределе $q \to 0$ аппроксимируется полиномом переменной q^2:

$$
\begin{aligned}
&h^c(\eta) \equiv \operatorname{Re}\Psi(1/2+\imath\,\eta) - \ln|\eta|\,; \\
&h^c(\eta) = -\frac{1}{6}\,q^2 - \frac{7}{60}\,q^4 + O(q^6), \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}\,, \quad q \to 0\,.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Правые части обоих обсуждаемых уравнений (11) содержат и функцию F_λ, и функцию G_λ, обладающие свойствами (16) и (20). Следовательно, по крайней мере одна из амплитудных функций c или s должна содержать неаналитические функции $C_\lambda(\eta)$ и $h^c(\eta)$ в качестве множителей или слагаемых. В силу представлений (10) и (13)–(15) этим же свойством должны обладать и функции U, N, u_λ, δ_λ и σ_λ. Поэтому вывод явных низкоэнергетических асимптотик этих функций представляется довольно сложным и требует особого подхода.

Из данного выше обсуждения задачи (11), (12) следует, что ее необходимо свести к альтернативной задаче Коши, наиболее удобной для численного анализа в пределе низких энергий, и попутно найти представления амплитудных функций c и s, в которых неаналитические функции C_λ и h^c выделены в явном виде. Выводу и обсуждению таких представлений посвятим следующий пункт.

2.2. Редуцированные амплитудные функции. Предложим новую формулировку метода амплитудных функций, наиболее адаптированную для анализа радиальной задачи Шредингера (4)–(6) в пределе низких энергий. Основными в такой формулировке будут редуцированные амплитудные функции $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$.

Используем аргумент $v = \sqrt{8\rho|\eta|}$ и известные представления [4] функций F_λ и Θ_λ:

$$\begin{aligned} &F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = q^{\lambda+1}\, C_\lambda(\eta)\, \nu!\, v\, f^{\pm}_\lambda(v, q)\,, \\ &\Theta_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = \frac{v}{\nu!}\, \theta^{\pm}_\lambda(v, q)\,, \quad \rho \geqslant 0\,,\ \nu \equiv 2\lambda + 1\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Положим

$$\begin{aligned} &s(\rho, \pm|\eta|) = (\nu!)^2\, q^{2\lambda+1}\, C^2_\lambda(\pm|\eta|)\, s^{\pm}(v, q)\,, \\ &c(\rho, \pm|\eta|) = c^{\pm}(v, q) + \frac{h^c(\pm|\eta|)}{C^2_{-1/2}(\pm|\eta|)}\, s(\rho, \pm|\eta|) = c^{\pm}(v, q) + h(q)\, s^{\pm}(v, q)\,, \end{aligned} \tag{23}$$

где четная функция $h(q)$ переменной q равна произведению

$$h(q) \equiv (\nu!)^2\, h^c(\eta)\, P_\lambda(q^2)\,, \quad P_\lambda(q^2) \equiv q^{2\lambda+1}\, \frac{C^2_\lambda(\eta)}{C^2_{-1/2}(\eta)}\,, \tag{24}$$

в котором h^c — функция (21), а P_λ — известный полином [4] степени $2\lambda+1$:

$$\begin{aligned} P_\lambda(q^2) = \frac{1}{(\,\nu!\,)^2} \Bigg\{ 1 + \frac{2}{3}\lambda(\lambda+1)(2\lambda+1)\, q^2 \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{15}(\lambda-1)(2\lambda-1)(5\lambda+6)\, q^2 + \ldots \right] \Bigg\}\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Поэтому $h(q) = h^c(\eta)$ в случае $2\lambda = -1$, а при любом $\lambda > -1/2$ благодаря формулам (21)

$$h(q) = -\frac{1}{6}\, q^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{7}{20} + \frac{1}{3}\lambda(\lambda+1)(2\lambda+1) \right] q^4 + O(q^6)\,, \quad q \to 0\,. \tag{26}$$

В определении (10) функции U и в задаче (11), (12) заменим функцию G_λ суммой (20), функции F_λ и Θ_λ представим в виде (22), а функции c и s — в виде (23). В полученных соотношениях приведем подробные слагаемые. В итоге для функции U выведем представление

$$\begin{aligned} &U(\rho, \pm|\eta|) = \nu!\, q^{\lambda+1} C_\lambda(\pm|\eta|)\, U^{\pm}(v, q)\,, \\ &U^{\pm}(v, q) \equiv v\, \left\{ c^{\pm}(v, q)\, f^{\pm}_\lambda(v, q) + s^{\pm}(v, q)\, \theta^{\pm}_\lambda(v, q) \right\}\,, \end{aligned} \tag{27}$$

в котором функции $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$ в области $v > 0$ подчиняются системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial_v c^{\pm}(v,q) &= v^3\, V(v)\, \left[\, c^{\pm}(v,q)\, f_{\lambda}^{\pm}(v,q) + s^{\pm}(v,q)\, \theta_{\lambda}^{\pm}(v,q)\,\right]\, \theta_{\lambda}^{\pm}(v,q)\,, \\ \partial_v s^{\pm}(v,q) &= -v^3\, V(v)\, \left[\, c^{\pm}(v,q)\, f_{\lambda}^{\pm}(v,q) + s_{\lambda}^{\pm}(v,q)\, \theta_{\lambda}^{\pm}(v,q)\,\right]\, f_{\lambda}^{\pm}(v,q)\,, \end{aligned} \tag{28}$$

а в точке $v = 0$ — начальным условиям

$$c^{\pm}(v,q) = 1\,, \quad s^{\pm}(v,q) = 0\,, \quad v = 0\,. \tag{29}$$

Вследствие теоремы 1 и однозначности представлений (23) функций c и s через функции $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$ верно следующее важное утверждение.

Теорема 2. *Если потенциал V удовлетворяет условиям (9), то при любом $\lambda \geqslant -1/2$ и любом $q \geqslant 0$ задача Коши (28), (29) имеет единственное, причем непрерывное на всей полуоси $v \geqslant 0$ решение $\{c^{\pm}, s^{\pm}\}$.*

Завершим редукцию радиальной задачи Шредингера (4)–(6) выводом специальных представлений функций N, δ_λ, σ_λ и u_λ, в которых все неаналитические функции аргумента q выделены в явном виде. Для этого в равенствах (13)–(15) выразим функции c и s через функции $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$ по формулам (23). В результате получим искомые соотношения

$$\begin{aligned} &N(\pm|\eta|) = \lim_{v\to\infty} N^{\pm}(v,q)\,, \\ &N^{\pm}(v,q) \equiv \Big\{\big[c^{\pm}(v,q) + h(q)\, s^{\pm}(v,q)\big]^2 + \big[(\nu!)^2 q^{2\lambda+1} C_{\lambda}^2(\pm|\eta|) s^{\pm}(v,q)\big]^2\Big\}^{-1/2}, \end{aligned} \tag{30}$$

формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta_\lambda(\pm|\eta|) &= \lim_{v\to\infty} \operatorname{tg}\delta_{\lambda}^{\pm}(v,q), \\ \operatorname{tg}\delta_{\lambda}^{\pm}(v,q) &\equiv (\nu!)^2\, q^{2\lambda+1} C_{\lambda}^2(\pm|\eta|)\, \frac{s^{\pm}(v,q)}{[c^{\pm}(v,q) + h(q)\, s^{\pm}(v,q)]} \end{aligned} \tag{31}$$

и представления

$$\begin{aligned} &\sigma_\lambda(\pm|\eta|) = \sigma_{\lambda}^{\pm}(q) \equiv \lim_{v\to\infty} \sigma_{\lambda}^{\pm}(v,q)\,, \\ &\sigma_{\lambda}^{\pm}(v,q) \equiv 4\, \varepsilon_\lambda\, |R|\, q\, \left[\, \nu!\, q^{\lambda} C_\lambda(\pm|\eta|)\,\right]^4\, \left[\, s^{\pm}(v,q)\, N^{\pm}(v,q)\,\right]^2\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Используя соотношения (10), (27) и (30), представим волновую функцию u_λ в виде

$$\begin{aligned} u_\lambda(\rho, \pm|\eta|) &= \nu!\, q^{\lambda+1} C_\lambda(\pm|\eta|)\, N(\pm|\eta|)\, U^{\pm}(v,q)\,, \\ U^{\pm}(v,q) &= v\, \left[\, c^{\pm}(v,q)\, f_{\lambda}^{\pm}(v,q) + s^{\pm}(v,q)\, \theta_{\lambda}^{\pm}(v,q)\,\right]\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Итак, для полного решения исходной задачи (4)–(6) необходимо сначала решить задачу (28), (29), затем найти множитель N, фазу δ_λ и сечение σ_λ по формулам (30)–(32) и, наконец, вычислить функцию u_λ по формулам (33). В силу теоремы 2 при условиях (9) такая функция будет единственным и непрерывным решением задачи (4)–(6).

Обсудим преимущества новых уравнений (28) по сравнению с исходными уравнениями (11). Вследствие представлений (22) уравнения (28) вместо функций Кулона F_λ и G_λ содержат функции $f_\lambda^\pm$ и $\theta_\lambda^\pm$. Как известно [6], в области $(0 \leqslant v < \infty,\, 0 \leqslant q < \infty)$ эти функции являются равномерно сходящимися рядами по четным степеням аргумента q:

$$f_\lambda^\pm(v,q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\, f_{\lambda n}^\pm(v)\,, \quad \theta_\lambda^\pm(v,q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\, \theta_{\lambda n}^\pm(q)\,. \tag{34}$$

Поэтому обе компоненты $c^\pm$ и $s^\pm$ решения $\{c^\pm, s^\pm\}$ задачи Коши (28), (29), в отличие от функций c и s, не содержат в качестве множителей или слагаемых никаких неаналитических функций переменной q. Более того, следует ожидать, что в области $(0 \leqslant v < \infty,\, 0 \leqslant q < \infty)$ обе функции $c^\pm$ и $s^\pm$ будут равномерно сходящимися рядами того же типа, что и ряды (34):

$$c^\pm(v,q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} c_n^\pm(v)\,, \quad s^\pm(v,q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} s_n^\pm(v)\,. \tag{35}$$

Следовательно, функции $c^\pm$ и $s^\pm$ устроены более просто, чем породившие их функции c и s. Благодаря указанным выше свойствам функций $f_\lambda^\pm$, $\theta_\lambda^\pm$, $c^\pm$ и $s^\pm$ численное интегрирование уравнений (28) в пределе низких энергий — довольно простая задача.

2.3. Уравнения для компонент редуцированных амплитудных функций. Выведем и обсудим задачи Коши для искомых компонент $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$ рядов (35). Для этого в системе уравнений (28) и в ее начальных условиях (29) представим функции $f_\lambda^\pm$ и $\theta_\lambda^\pm$ известными рядами (34), а редуцированные амплитудные функции $c^\pm$ и $s^\pm$ — искомыми рядами (35). Получившиеся равенства запишем в виде бесконечных полиномов по четным степеням параметра q. Благодаря линейной независимости системы $\{q^{2n}\}_{n=0}^\infty$ степенных функций q^{2n} эти полиномы тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда равны нулю все их «коэффициенты», зависящие лишь от переменной v. Применив это правило, для каждого значения $n = 0, 1, \ldots$ на интервале $v > 0$ получим искомую систему двух уравнений

$$\partial_v c_n^\pm = v^3 V \left[\, c_n^\pm f_{\lambda 0}^\pm + s_n^\pm \theta_{\lambda 0}^\pm \,\right] \theta_{\lambda 0}^\pm + v^3 V \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell+p=n-k} \left[\, c_k^\pm f_{\lambda \ell}^\pm + s_i^\pm \theta_{\lambda \ell}^\pm \,\right] \theta_{\lambda p}^\pm\,, \tag{36}$$

$$\partial_v s_n^\pm = -v^3 V \left[\, c_n^\pm f_{\lambda 0}^\pm + s_n^\pm \theta_{\lambda 0}^\pm \,\right] f_{\lambda 0}^\pm - v^3 V \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell+p=n-k} \left[\, c_k^\pm f_{\lambda \ell}^\pm + s_i^\pm \theta_{\lambda \ell}^\pm \,\right] f_{\lambda p}^\pm$$

с начальными условиями

$$c_0^{\pm}(v) = \delta_{n0}\,, \quad s_n^{\pm}(v) = 0\,, \quad v = 0\,. \tag{37}$$

Обсудим строение цепочки задач Коши (36), (37). В уравнениях (36) по определению суммы с верхним индексом $n-1$ полагаются равными нулю только при $n = 0$. В отличие от исходной задачи (28), (29) все $(n = 0, 1, \ldots)$ задачи (36), (37) не содержат волнового числа q и поэтому называются энергонезависимыми. Первая $(n = 0)$ система (36) однородная, а любая $(n > 0)$ другая система (36) — неоднородная и содержит в своей правой части компоненты $c_m^{\pm}$ и $s_m^{\pm}$ решений $\{c_m^{\pm}, s_m^{\pm}\}$ всех предыдущих $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$ систем (36). Следовательно, цепочка задач (36), (37) является рекуррентной по индексу n. Система уравнений (36) с номером $n = 0$ благодаря представлениям (47) является наиболее простой: в случае кулоновского отталкивания она имеет вид

$$\begin{aligned} 2\,\partial_v c_0^{+} &= v^3\, V\, \left[\, c_0^{+}\, I_\nu + 2\, s_0^{+}\, K_\nu \,\right]\; K_\nu\,, \\ 4\,\partial_v s_0^{+} &= -v^3\, V\, \left[\, c_0^{+}\, I_\nu + 2\, s_0^{+}\, K_\nu \,\right]\; I_\nu\,, \end{aligned}$$

а в случае кулоновского притяжения представляется уравнениями

$$\begin{aligned} 4\,\partial_v c_0^{-} &= -\pi\, v^3\, V\, \left[\, c_0^{-}\, J_\nu - \pi s_0^{+}\, Y_\nu \,\right]\; Y_\nu\,, \\ 4\,\partial_v s_0^{-} &= -v^3\, V\, \left[\, c_0^{-}\, J_\nu - \pi s_0^{+}\, Y_\nu \,\right]\; J_\nu\,. \end{aligned}$$

Система уравнений (36) с номером $n = 1$ устроена более сложно:

$$\begin{aligned} \partial_v c_1^{\pm} &= v^3 V\, \big[\, (c_1^{\pm} f_{\lambda 0}^{\pm} + s_1^{\pm} \theta_{\lambda 0}^{\pm})\, \theta_{\lambda 0}^{\pm} + (c_0^{\pm} f_{\lambda 0}^{\pm} + s_0^{\pm} \theta_{\lambda 0}^{\pm})\, \theta_{\lambda 1}^{\pm} + \\ &\qquad\qquad + (c_0^{\pm} f_{\lambda 1}^{\pm} + s_0^{\pm} \theta_{\lambda 1}^{\pm})\, \theta_{\lambda 0}^{\pm} \,\big]\,, \\ \partial_v s_1^{\pm} &= -v^3 V\, \big[\, (c_1^{\pm} f_{\lambda 0}^{\pm} + s_1^{\pm} \theta_{\lambda 0}^{\pm}) f_{\lambda 0}^{\pm} + (c_0^{\pm} f_{\lambda 0}^{\pm} + s_0^{\pm} \theta_{\lambda 0}^{\pm}) f_{\lambda 1}^{\pm} + \\ &\qquad\qquad + (c_0^{\pm} f_{\lambda 1}^{\pm} + s_0^{\pm} \theta_{\lambda 1}^{\pm}) f_{\lambda 0}^{\pm} \,\big]\,. \end{aligned}$$

Заметим, что анализ системы (36) методом последовательных приближений Пикара–Линделёфа [8] затрудняется двумя обстоятельствами: при любом n такая система недиагональная, а мажорантные оценки произведений $f_{\lambda 0}^{\pm}(w)\,\theta_{\lambda 0}^{\pm}(v)$, $w > v$, неизвестны.

Чтобы преодолеть оба указанных затруднения, сведем каждую $(n = = 0, 1, \ldots)$ задачу Коши (36), (37) к диагональной системе интегральных уравнений для функций $y_{1n}^{\pm}$ и $y_{2n}^{\pm}$.

Для этого сначала определим интеграл $b^{\pm}$ и функции $p_1^{\pm}$ и $p_2^{\pm}$ формулой

$$b^{\pm}(v) \equiv \int_0^v t^3\, V(t)\, f_{\lambda 0}^{\pm}(t)\, \theta_{\lambda 0}^{\pm}(t)\, dt \tag{38}$$

и формулами

$$
\begin{aligned}
p_1^{\pm}(v) &\equiv \quad v^3\, V(v)\, \left[\,\theta_{\lambda 0}^{\pm}(v)\,\right]^2 \exp\left[\,-2\, b^{\pm}(v)\,\right]\,, \\
p_2^{\pm}(v) &\equiv -v^3\, V(v)\, \left[\,f_{\lambda 0}^{\pm}(v)\,\right]^2 \exp\left[\,+2\, b^{\pm}(v)\,\right]\,.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Затем подстановкой

$$
c_n^{\pm}(v) = y_{1n}^{\pm}(v)\, \exp\left[\,b^{\pm}(v)\,\right]\,, \quad s_n^{\pm}(v) = y_{2n}^{\pm}(v)\, \exp\left[\,-b^{\pm}(v)\,\right] \tag{40}
$$

сведем исходную задачу Коши (36), (37) к системе дифференциальных уравнений

$$
\partial_v y_{in}^{\pm}(v) = p_i^{\pm}(v)\, y_{jn}^{\pm}(v) + a_{in}^{\pm}(v)\,, \quad i = 1, 2\,, \quad j = 1 + \delta_{i1}\,, \quad v > 0\,, \tag{41}
$$

с начальными условиями $y_{in}^{\pm}(v) = \delta_{n0}\, \delta_{i1}$, $i = 1, 2$, в точке $v = 0$ и функциями $a_{1n}^{\pm}$ и $a_{2n}^{\pm}$. Эти функции тождественно равны нулю, если $n = 0$, а при $n > 0$ являются конечными двухкратными суммами. Опустив для краткости аргумент v, запишем эти суммы в виде

$$
\begin{aligned}
a_{1n}^{\pm} &\equiv v^3 V \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell+p=n-k} \left\{\, y_{1k}^{\pm}\, f_{\lambda\ell}^{\pm} + y_{2k}^{\pm}\, \theta_{\lambda\ell}^{\pm}\, \exp\left(-2b^{\pm}\right) \right\}\, \theta_{\lambda p}^{\pm}\,, \\
a_{2n}^{\pm} &\equiv -v^3 V \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell+p=n-k} \left\{\, y_{1k}^{\pm}\, f_{\lambda\ell}^{\pm}\, \exp\left(2b^{\pm}\right) + y_{2k}^{\pm}\, \theta_{\lambda\ell}^{\pm} \right\}\, f_{\lambda p}^{\pm}\,.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Теперь представим систему дифференциальных уравнений (41) в виде недиагональной системы двух $(i = 1, 2\,; j = 1 + \delta_{i1})$ интегральных уравнений:

$$
\begin{aligned}
y_{in}^{\pm}(v) &= d_{in}^{\pm}(v) + \int_0^v p_i^{\pm}(t)\, y_{jn}^{\pm}(t)\, dt\,, \\
d_{in}^{\pm}(v) &= \delta_{n0}\, \delta_{i1} + \int_0^v a_{in}^{\pm}(t)\, dt\,.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Наконец, итерацией этих уравнений выведем искомую диагональную систему:

$$
\begin{aligned}
y_{in}^{\pm}(v) &= r_{in}^{\pm}(v) + \int_0^v p_i^{\pm}(t_1)\, dt_1 \int_0^{t_1} p_j^{\pm}(t)\, y_{in}^{\pm}(t)\, dt\,, \\
r_{in}^{\pm}(v) &= d_{in}^{\pm}(v) + \int_0^v p_i^{\pm}(t)\, d_{jn}^{\pm}(t)\, dt\,.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Первое $(i = 1,\ j = 2)$ уравнение этой системы не содержит функцию $y_{2n}^{\pm}$, а второе $(i = 2,\ j = 1)$ не содержит функцию $y_{1n}^{\pm}$. Поэтому эти уравнения можно исследовать независимо друг от друга. В этом заключается первое и неоспоримое преимущество обсуждаемой системы (44) по сравнению с недиагональной системой (36). Второе преимущество состоит в том, что достаточно решить только первое ($i = 1$, $j = 2$) из уравнений системы (44), а затем вычислить функцию $y_{2n}^{\pm}$ как интегральный образ (43) ($i = 2, j = 1$) уже найденной функции $y_{1n}^{\pm}$. Еще одно преимущество системы (44) порождается строением сумм (42): при любом n эти суммы, а значит, и интегралы $d_{in}^{\pm}$ и $r_{in}^{\pm}$, стоящие в уравнениях (43) и (44), содержат искомые функции $y_{1k}^{\pm}$ и $y_{2k}^{\pm}$ с номером $k \leqslant n - 1$. Поэтому системы двух уравнений (44) образуют рекуррентную по индексу n цепочку систем, которые можно исследовать в порядке возрастания этого индекса.

В следующем разделе используем все преимущества систем (44).

3. СВОЙСТВА КОМПОНЕНТ РЕДУЦИРОВАННЫХ АМПЛИТУДНЫХ ФУНКЦИЙ

Следующий этап построения предлагаемого асимптотического метода — анализ свойств компонент $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$. Наша очередная задача — доказать существование и единственность всех таких компонент только в том случае, когда все вспомогательные функции $d_{in}^{\pm}$ и $r_{in}^{\pm}$ и $y_{in}^{\pm}$, $i = 1, 2$, $n = 0, 1, \ldots$, непрерывны на полуоси $v \geqslant 0$ и, следовательно, в обоих пределах $v \to 0$ и $v \to \infty$ принимают вполне определенные конечные значения.

Для решения поставленной задачи используем представления (40) компонент $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$ через функции $y_{1n}^{\pm}$ и $y_{2n}^{\pm}$, интегральные соотношения (43) и уравнения (44). В п. 3.1 приведем и обсудим известные представления компонент $f_{\lambda n}^{\pm}$ и $\theta_{\lambda n}^{\pm}$ разложений (34). В п. 3.2 используем представления компонент $f_{\lambda 0}^{\pm}$ и $\theta_{\lambda 0}^{\pm}$ для того, чтобы доказать вспомогательные утверждения, сформулированные в виде лемм 1 и 2. В п. 3.3 воспользуемся этими леммами для доказательства теорем существования и единственности.

3.1. Компоненты разложений функций Кулона и ограничения на потенциал. Как доказано в работе [6], компоненты $f_{\lambda n}^{\pm}$ и $\theta_{\lambda n}^{\pm}$ рядов (34) определяются формулой

$$f_{\lambda n}^{\pm}(v) \equiv \frac{(-1)^n}{2^{3n+1}} \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} b_{ns}\, v^s \left\{ \begin{array}{r} (-1)^s\, I_{\nu+s}(v) \\ J_{\nu+s}(v) \end{array} \right\}, \quad \nu \equiv 2\lambda + 1\,, \tag{45}$$

и формулой

$$\theta_{\lambda n}^{\pm}(v) \equiv \left(-\frac{1}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} (-1)^s\, b_{ns}\; v^s \times \\ \times \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{ns}^{+}\, I_{\nu+s}(v) + \beta_{ns}^{+} K_{\nu+s}(v) \\ (-1)^s\, \alpha_{ns}^{-}\, J_{\nu+s}(v) + \beta_{ns}^{-}\,(-\pi/2)\, Y_{\nu+s}(v) \end{array} \right\}. \tag{46}$$

В этих формулах I_μ, J_μ и K_μ, Y_μ — функции Бесселя первого и второго рода, а $b^\pm_{ns}$, $\alpha^\pm_{ns}$ и $\beta^\pm_{ns}$ — коэффициенты. Коэффициенты b_{ns} подчиняются рекуррентной цепочке уравнений

$$s\, b_{ns} = n\, [\, b_{n-1,s-3} + 2\,(2\lambda + s)\, b_{n-2,s-2}\,]\ ,$$

в которой $s = 2n, 2n+1, \ldots 3n$ при каждом $n = 0, 1, \ldots$, коэффициент b_{00} равен единице, а все коэффициенты b_{mt} равны нулю, если $t < 2m$ или $t > 3m$. Коэффициенты $\alpha^\pm_{ns}$ и $\beta^\pm_{ns}$ можно выразить через коэффициенты b_{ns} и коэффициенты рядов Маклорена для функций $c^\pm_\lambda(q)$ и $d^\pm_\lambda(q)$, найденных в работе [6]. Другой способ вычисления коэффициентов $\alpha^\pm_{ns}$ и $\beta^\pm_{ns}$ пока неизвестен.

Для примера приведем явные представления компонент $f^\pm_{\lambda n}$ и $\theta^\pm_{\lambda n}$, $n = 0, 1$. Компоненты $f^\pm_{\lambda 0}$ и $\theta^\pm_{\lambda 0}$ пропорциональны функциям Бесселя:

$$f^\pm_{\lambda 0}(v) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} I_\nu(v) \\ J_\nu(v) \end{array} \right\}, \quad \theta^\pm_{\lambda 0}(v) = \left\{ \begin{array}{c} K_\nu(v) \\ (-\pi/2)\, Y_\nu(v) \end{array} \right\}. \tag{47}$$

Компонента $f^\pm_{\lambda 1}$ — сумма двух слагаемых:

$$f^\pm_{\lambda 1}(v) = -(\lambda+1)\, \frac{v^2}{8} \left\{ \begin{array}{c} I_{\nu+2}(v) \\ J_{\nu+2}(v) \end{array} \right\} + \frac{v^3}{48} \left\{ \begin{array}{c} I_{\nu+3}(v) \\ -J_{\nu+3}(v) \end{array} \right\}.$$

Компонента $\theta^\pm_{\lambda 1}$ — более сложная сумма:

$$\theta^\pm_{\lambda 1}(v) = -\frac{1}{12} \left\{ \begin{array}{c} I_\nu(v) \\ J_\nu(v) \end{array} \right\} + \frac{2}{3}\lambda(\lambda+1)(2\lambda+1) \left\{ \begin{array}{c} K_\nu(v) \\ (-\pi/2) Y_\nu(v) \end{array} \right\} -$$
$$- (\nu+1)\, \frac{v^2}{8} \left\{ \begin{array}{r} K_\nu(v) \\ (-\pi/2) Y_{\nu+2}(v) \end{array} \right\} + \frac{v^3}{24} \left\{ \begin{array}{r} K_{\nu+3}(v) \\ (-\pi/2) Y_{\nu+3}(v) \end{array} \right\}.$$

Только в случае $2\lambda = -1$ второе слагаемое такой суммы тождественно равно нулю.

Исследуем поведение компонент $f^\pm_{\lambda n}(v)$ и $\theta^\pm_{\lambda n}(v)$ в двух пределах: $v \to 0$ и $v \to \infty$. Для этого используем представления (45)–(47), асимптотики функций Бесселя [9] и функцию

$$\vartheta_\mu(v) \equiv v - \frac{\pi}{2} \left(\mu + \frac{1}{2} \right).$$

Если $2\lambda \geqslant -1$ и $n \geqslant 0$, то компонента $f^\pm_{\lambda n}$, $n \geqslant 0$, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} & f^\pm_{\lambda n}(v) \sim v^{2n+\nu}\ ,\ v \to 0\, ; \\ & f^\pm_{\lambda n}(v) \sim v^{3n-1/2} \left\{ \begin{array}{c} \exp v \\ \sin \vartheta_{\nu+3n}(v) \end{array} \right\}, \ \frac{v}{\nu+3n} \to \infty\, . \end{aligned} \tag{48}$$

Асимптотическое поведение компоненты $\theta^{\pm}_{\lambda n}$ радикально зависит от индексов λ и n. В обоих случаях $2\lambda > -1$ или $2\lambda = -1$ и при любом $n \geqslant 1$ верны формулы

$$\begin{aligned} &\theta^{\pm}_{\lambda n}(v) \sim v^{-\nu}\,,\ v \to 0\,;\\ &\theta^{\pm}_{\lambda n}(v) \sim v^{3n-1/2} \left\{ \begin{array}{c} \exp v \\ \cos\vartheta_{\nu+3n}(v) \end{array} \right\}, \quad \frac{v}{\nu+3n} \to \infty\,. \end{aligned} \tag{49}$$

В случае $2\lambda > -1$ и $n = 0$ первая из этих формул остается в силе, а вторая вместо растущей экспоненты $\exp v$ содержит убывающую экспоненту $\exp(-v)$:

$$\theta^{\pm}_{\lambda 0}(v) \sim v^{-\nu}\,,\ v \to 0\,; \qquad \theta^{\pm}_{\lambda 0}(v) \sim v^{-1/2} \left\{ \begin{array}{c} \exp(-v) \\ \cos\vartheta_{\nu}(v) \end{array} \right\}, \quad \frac{v}{\nu} \to \infty\,. \tag{50}$$

Только в оставшемся случае $2\lambda = -1$ и $n = 0$ выполняются соотношения

$$\theta^{\pm}_{\lambda 0}(v) \sim \ln v\,, \quad v \to 0\,; \qquad \theta^{\pm}_{\lambda 0}(v) \sim v^{-1/2} \left\{ \begin{array}{c} \exp(-v) \\ \cos\vartheta_{0}(v) \end{array} \right\}, \quad v \to \infty\,. \tag{51}$$

Обсудим асимптотики (48)–(51). Если $v \to 0$, $2\lambda > -1$ и $n > 0$, то компоненты $f^{+}_{\lambda n}$ и $f^{-}_{\lambda n}$ сходятся к нулю по одному и тому же закону ($f^{\pm}_{\lambda n} \sim v^{\nu+2n}$), а модули компонент $\theta^{+}_{\lambda n}$ и $\theta^{-}_{\lambda n}$ возрастают одинаковым образом ($|\theta^{\pm}_{\lambda n}| \sim v^{-\nu}$). В случае $v \to 0$, $2\lambda > -1$ и $n > 0$ компоненты $f^{+}_{\lambda n}$, $\theta^{+}_{\lambda n}$ и компоненты $f^{-}_{\lambda n}$, $\theta^{-}_{\lambda n}$ имеют радикально разные асимптотики. Действительно, модули компонент $f^{+}_{\lambda n}$ и $\theta^{+}_{\lambda n}$ быстро растут как произведение функций $v^{3n-1/2}$ и $\exp v$, а компоненты $f^{-}_{\lambda n}$ и $\theta^{-}_{\lambda n}$ осциллируют с амплитудой порядка $O(v^{3n-1/2})$. Только в случае $2\lambda = -1$, $n = 0$ и $v \to 0$ компоненты $\theta^{+}_{\lambda 0}$ и $\theta^{-}_{\lambda 0}$ расходятся как логарифм $\ln v$.

Теперь решим следующую задачу: в случае $2\lambda > -1$, $\ell + p = n > 0$, $p > 0$ и $v \geqslant 0$ найти ограничения на потенциал V, достаточные для сходимости интегралов

$$\gamma^{+}(v) \equiv \int_0^v t^3\, V(t)\, f^{+}_{\lambda\ell}(t)\, \theta^{+}_{\lambda p}(t)\, dt\,, \quad \gamma^{-}(v) \equiv \int_0^v t^3\, V(t)\, f^{-}_{\lambda\ell}(t)\, \theta^{-}_{\lambda p}(t)\, dt. \tag{52}$$

Решение начнем с пояснения: интеграл γ^{+} отвечает случаю кулоновского отталкивания ($\alpha = 1$), а интеграл γ^{-}_{1n} — случаю кулоновского притяжения ($\alpha = -1$).

Пусть $v \to 0$, тогда $f^{\pm}_{\lambda\ell}\,\theta^{\pm}_{\lambda p} \sim O(v^{2\ell})$. Поэтому одни и те же условия (2), не зависящие от α, являются достаточными для сходимости обоих интегралов (52) на нижнем пределе и на интервале $0 < v < \infty$. Теперь пусть $v \to \infty$, тогда

$$
\begin{aligned}
&t^3\,|V(t)|\,|f^+_{\lambda\ell}(t)\,\theta^+_{\lambda p}(t)| \sim t^{3n+2}\,|V(t)|\,\exp{(2t)}\,,\\
&t^3\,|V(t)|\,|f^-_{\lambda\ell}(t)\,\theta^-_{\lambda p}(t)| \sim t^{3n+2}\,|V(t)|\,.
\end{aligned}
$$

Поэтому условия, достаточные для сходимости интегралов γ^+ и γ^- в точке $v=\infty$, радикально разные: интеграл γ^+ заведомо сходится при условиях (3), $\alpha=1$, $2\beta>3(n+1)$, а интеграл γ^- — при более слабых условиях (3), $\alpha=-1$, $2\beta>3(n+1)$. Следовательно, зависимость условий (3) от параметра α порождается тем, что в пределе $v\to\infty$ поведение компонент $f^+_{\lambda k}$ и $\theta^+_{\lambda k}$ отличается от поведения компонент $f^-_{\lambda k}$ и $\theta^-_{\lambda k}$. При условиях (3), $\alpha=\pm1$, но $2\beta\leqslant 3(n+1)$, оба интеграла (52) могут расходиться в точке $v=\infty$.

3.2. Леммы о мажорантных оценках. Рассмотрим два случая: сначала случай $2\lambda>-1$, а затем случай $2\lambda=-1$. В каждом из них докажем лемму о мажорантной оценке произведения $p^\pm_1 p^\pm_2$ функций (39).

Лемма 1. *Пусть* $2\lambda>-1$ *и по определению*

$$
\ell(v)\equiv a_\lambda\int_0^v t^3\,|V(t)|\,dt\,,\quad a_\lambda\equiv\sqrt{\frac{2\pi}{2\lambda+1}}\,,\quad 2\,\tau(v)\equiv\exp{[\,2\ell(v)\,]}-1\,. \tag{53}
$$

Тогда при условиях (9) произведение $p^\pm_1\,p^\pm_2$ *функций (39) удовлетворяет неравенству*

$$
\left|\,p^\pm_1(v)\,p^\pm_2(w)\,\right|\leqslant\partial_v\tau(v)\,\partial_w\tau(w)\,,\quad 0\leqslant w\leqslant v\leqslant\infty\,. \tag{54}
$$

Доказательство начнем с анализа интеграла ℓ и функции τ. Вследствие условий (9) интеграл ℓ сходится на нижнем пределе, существует при любом $v>0$, в том числе и в случае $v=\infty$. Поэтому из определения (53) функции τ через интеграл ℓ следуют ее важные свойства. Перечислим их. Функция τ равна нулю в точке $v=0$, монотонно возрастает, но ограничена на полуоси $v\geqslant0$. Производная $\partial_v\tau$ ограничена в области $v>0$, вообще говоря, не ограничена в точке $v=0$, но интегрируема на всей полуоси $v\geqslant0$.

Продолжим доказательство. В известной мажорантной оценке [5]

$$
|\,F_\lambda(\rho',\eta)\,G_\lambda(\rho,\eta)\,|\leqslant a_\lambda\sqrt{\rho'\rho}\,,\quad 0\leqslant\rho'\leqslant\rho\leqslant\infty\,,\quad 2\lambda>-1\,,
$$

заменим функцию G_λ суммой (20), функции F_λ и Θ_λ выразим через функции $f^\pm_\lambda$ и $\theta^\pm_\lambda$ по формулам (22), воспользуемся свойствами (21), (24) и (25) функций h^c и P_λ и, наконец, представим функции $f^\pm_\lambda$ и $\theta^\pm_\lambda$ рядами (34). В полученном неравенстве положим $\rho=v^2/(8|\eta|)$, $\rho'=w^2/(8|\eta|)$ и перейдем к пределу $q\to0$. В итоге получим оценку

$$
\left|\,f^\pm_{\lambda0}(w)\,\theta^\pm_{\lambda0}(v)\,\right|\leqslant a_\lambda\,,\quad 0\leqslant w\leqslant v\leqslant\infty\,,\quad 2\lambda>-1\,. \tag{55}
$$

Перейдем к выводу других вспомогательных соотношений. Благодаря оценке (55) интеграл $b^{\pm}$, заданный формулой (38), удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$|b^{\pm}(v)| = \left| \int_0^v t^3\, V(t)\, f^{\pm}_{\lambda 0}(t)\, \theta^{\pm}_{\lambda 0}(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^v t^3\ |V(t)|\ \left| f^{\pm}_{\lambda 0}(t)\, \theta^{\pm}_{\lambda 0}(t) \right|\ dt\ \leqslant$$
$$\leqslant a_\lambda \int_0^v t^3\, |V(t)|\, dt = \ell(v) < \infty\,, \quad v \geqslant 0\,.$$

Следовательно, $|b^{\pm}(v)| \leqslant \ell(v)$, $v \geqslant 0$, и поэтому верны неравенства

$$\exp\left[-2b^{\pm}(v)\right] \leqslant \exp\left[\,2\ell(v)\,\right] < \infty\,,$$
$$\exp\left[\,2b^{\pm}(v)\right] \leqslant \exp\left[\,2\ell(v)\,\right] < \infty\,, \quad v \geqslant 0\,.$$

Вследствие этих неравенств и определений (53) при любом $v \geqslant 0$ имеем

$$a_\lambda\, v^3\ |\,V(v)\,|\ \exp\left[\pm 2b^{\pm}(v)\right] \leqslant\ a_\lambda\, v^3\ |\,V(v)\,|\ \exp\left[\,2\ell(v)\,\right]\ =$$
$$= \partial_v \ell(v)\ \exp\left[\,2\ell(v)\,\right] = \partial_v \tau(v)\,. \quad (56)$$

Теперь докажем неравенство (54). Используя определение (39) функций $p^{\pm}_1$ и $p^{\pm}_2$, оценку (55) и соотношения (56), при условии $0 \leqslant w \leqslant v \leqslant \infty$ получаем

$$\left|\, p^{\pm}_1(v)\, p^{\pm}_2(w) \right| \leqslant \left\{ \left|\, v^3\, V(v)\, \right| \exp\left[2b^{\pm}(v)\right] \right\} \left\{ w^3\ |\,V(w)\,|\ \exp\left[-2b^{\pm}(w)\right] \right\} \times$$
$$\times \left|\, \theta^{\pm}_{\lambda 0}(v)\, f^{\pm}_{\lambda 0}(w)\, \right|^2 \leqslant \left\{\, a_\lambda\, v^3\ \ |\,V(v)\,|\ \exp\left[\,2\ell(v)\right] \right\} \times$$
$$\times \left\{\, a_\lambda\, w^3\ |\,V(w)\,|\ \exp\left[\,2\ell(w)\right] \right\} = \partial_v \tau(v)\, \partial_w \tau(w).$$

Следовательно, неравенство (54) верно, что и требовалось показать.

Стоит сделать два важных замечания. Из представлений (47) функций $f^{\pm}_{\lambda 0}$ и $\theta^{\pm}_{\lambda 0}$ и оценки (55) следуют ранее неизвестные мажорантные оценки произведений функций Бесселя четного порядка:

$$|\,I_\nu(v)\, K_\nu(w)\,| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\,, \quad |\,J_\nu(v)\, Y_\nu(w)\,| \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\,,$$
$$\nu = 2\lambda + 1 = 2, 4, \ldots\,, \quad 0 \leqslant v \leqslant w \leqslant \infty\,.$$

Оценки произведений функций Бесселя первого рода и полуцелого порядка,

$$\left|\, J_{m+1/2}(v)\, Y_{m+1/2}(w)\, \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi(2m+1)}}\,, \quad m = 0, 1, \ldots\,, \quad 0 \leqslant v \leqslant w \leqslant \infty\,,$$

впервые получены А. Мартином в его работе [10].

Лемма 2. *Пусть $2\lambda = -1$, γ — постоянная Эйлера, интеграл $\ell^{\pm}$ задан формулами*

$$\ell^{\pm}(v) = \frac{1}{2}\int_0^v t^3\,|V(t)|\,\phi^2(t)\left\{\begin{array}{c}\mathrm{ch}^2 v\\ 1\end{array}\right\}dt\,,\quad \phi(v) \equiv \left|\ln\left(\frac{t}{2}\right)+\gamma\right|+1\,,\ (57)$$

а функция $\tau^{\pm}(v)$ — формулой

$$2\,\tau^{\pm}(v) = \exp\big[\,2\ell^{\pm}(v)\big] - 1\,. \qquad (58)$$

Тогда при условиях (2) и (3), $\beta > 2$, для произведения $p_1^{\pm}\,p_2^{\pm}$ функций (39) верна оценка

$$\big|\,p_1^{\pm}(v)\,p_2^{\pm}(w)\,\big| \leqslant \partial_v\tau^{\pm}(v)\,\partial_w\tau^{\pm}(w)\,,\quad v\geqslant 0\,,\quad w\geqslant 0\,. \qquad (59)$$

Доказательство начнем следующим замечанием: интеграл $\ell^{\pm}$ и функция $\tau^{\pm}$ обладают теми же свойствами, что и интеграл ℓ и функция τ, заданные формулой (53) и использованные в лемме 1. Перечислим эти свойства. При условиях (2) и (3), $\beta > 2$, интеграл $\ell^{\pm}$ сходится на нижнем пределе и существует при любом $v > 0$, в том числе и в случае $v = \infty$. Согласно определению (58) функция $\tau^{\pm}$ равна нулю в точке $v = 0$, монотонно возрастает, но ограничена на полуоси $v \geqslant 0$. Производная $\partial_v\tau^{\pm}$ ограничена в области $v > 0$, вообще говоря, не ограничена в точке $v = 0$, но интегрируема на всей полуоси $v \geqslant 0$.

Выведем заведомо завышенные, но зато удобные для дальнейших исследований мажорантные оценки функций Бесселя нулевого порядка. Как известно [9], в пределе $v \to \infty$ обе функции Y_0 и K_0 сходятся к нулю, а в пределе $v \to 0$ имеют однотипные асимптотики:

$$Y_0(v) \sim \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{v}{2}\right)+\gamma\right]\,,\quad K_0(v) \sim -\left[\ln\left(\frac{v}{2}\right)+\gamma\right]\,,\quad v\to 0\,.$$

Поэтому можно предположить, что эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\left\{\begin{array}{c}K_0(v)\\ |Y_0(v)|\end{array}\right\} \leqslant \phi(v)\left\{\begin{array}{c}\mathrm{ch}(v)\\ 1\end{array}\right\}\,,\quad v\geqslant 0\,.$$

В результате вычислений удалось показать, что эти соотношения справедливы. Известно [9], что $|J_0(v)| \leqslant 1$ и $I_0(v) \leqslant \mathrm{ch}(v)$ при любом $v \geqslant 0$. Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{c}I_0(v)\\ |J_0(v)|\end{array}\right\} \leqslant \phi(v)\left\{\begin{array}{c}\mathrm{ch}(v)\\ 1\end{array}\right\}\,,\quad v\geqslant 0\,.$$

Оценим модуль произведения $f_{\lambda 0}^{\pm}\,\theta_{\lambda 0}^{\pm}$ сверху. Благодаря равенствам (47) и полученным выше оценкам функций Бесселя нулевого порядка имеет место равномерная и симметричная относительно перестановки аргументов v и w мажорантная оценка

$$|f^{\pm}_{\lambda 0}(v)\,\theta^{\pm}_{\lambda 0}(w)| \leqslant \frac{1}{2}\,\phi(v)\,\phi(w) \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{ch}(v)\mathrm{ch}(w) \\ 1 \end{array} \right\}, \quad v \geqslant 0\,, \quad w \geqslant 0\,, \quad 2\lambda = -1\,. \tag{60}$$

Теперь можно получить неравенства (59) по аналогии с выводом неравенств (54), подробно изложенным в лемме 1. Для этого вместо оценки (55) используем оценку (60), а вместо функций ℓ и τ — функции $\ell^{\pm}$ и $\tau^{\pm}$. Ограничимся краткими пояснениями. В силу определений (38) и (57) интегралов $b^{\pm}$ и $\ell^{\pm}$ и оценки (60) верны три неравенства:

$$\big|\, b^{\pm}(v) \,\big| \leqslant \ell^{\pm}(v)\,,$$
$$\exp\left[-2\,b^{\pm}(v)\right] \leqslant \exp\left[2\,\ell^{\pm}(v)\right], \quad \exp\left[2\,b^{\pm}(v)\right] \leqslant \exp\,\left[\,2\,\ell^{\pm}(v)\,\right], \quad v \geqslant 0.$$

Благодаря второму и третьему из них, а также определениям (39), (58) функций $p^{\pm}_1$, $p^{\pm}_2$, $\tau^{\pm}$ и оценке (60) справедливо неравенство (59). Ключевыми при выводе этого неравенства являются тождества

$$2\,\partial_v \tau^{\pm}(v) \equiv 2\,\partial_v \ell^{\pm}(v)\,\exp\left[2\,\ell^{\pm}(v)\right] \equiv$$
$$\equiv v^3\,|V(v)|\,\phi^2(v) \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{ch}^2(v) \\ 1 \end{array} \right\} \exp\left[2\,\ell^{\pm}(v)\right].$$

Этим замечанием закончим доказательство леммы 2.

3.3. Теоремы существования и единственности. Последовательно докажем теоремы существования и единственности непрерывного на полуоси решения $\{y^{\pm}_{1n}, y^{\pm}_{2n}\}$ каждой $(n = 0, 1, \ldots, m)$ системы интегральных уравнений (44). Затем, используя такие теоремы, покажем, что при $n = 1, 2, \ldots, m$ задача Коши (11), (12), имеет непрерывное на полуоси решение $\{c^{\pm}_n, s^{\pm}_n\}$. В случае $2\lambda > -1$, $n = 0$ существование и единственность решения системы интегральных уравнений (44) докажем подробно. Это позволит существенно сократить анализ случаев $2\lambda > -1$, $n > 0$ и $2\lambda = -1$, $n \geqslant 0$.

Теорема 3. *Если $2\lambda > -1$ и $n = 0$, то при условиях (9) система уравнений (44) имеет единственное решение $\{y^{\pm}_{10}, y^{\pm}_{20}\}$. Его компоненты $y^{\pm}_{10}$ и $y^{\pm}_{20}$ непрерывны на полуоси $v \geqslant 0$ и в пределе $v \to 0$ удовлетворяют соотношениям $y^{\pm}_{10} \to 1$, $y^{\pm}_{20} = o(v^{2\nu})$, $\nu = 2\lambda + 1$.*

Доказательство начнем пояснениями. Только при $n = 0$ из формул (41)–(44) следуют тождества $a^{\pm}_{i0}(v) \equiv 0$, $d^{\pm}_{i0}(v) \equiv \delta_{i1}$ и $r_{i0}(v) \equiv \delta_{i1}$, где $i = 1, 2$, а $v \geqslant 0$. Поэтому первое $(i = 1,\, j = 2)$ уравнение системы (44) записывается как

$$y^{\pm}_{10}(v) = 1 + \int_0^v p^{\pm}_1(v_1)\,dv_1 \int_0^{v_1} p^{\pm}_2(v_2)\; y^{\pm}_{10}(v_2)\,dv_2\,, \quad v \geqslant 0\,, \tag{61}$$

второе $(i = 2,\, j = 1)$ уравнение системы (43) сводится к интегральному соотношению

$$y_{20}^{\pm}(v) = \int_0^v p_2^{\pm}(t)\, y_{10}^{\pm}(t)\, dt\,, \quad v \geqslant 0\,, \tag{62}$$

а первое $(i = 1,\, j = 2)$ уравнение этой же системы принимает вид

$$y_{10}^{\pm}(v) = 1 + \int_0^v p_1^{\pm}(t)\, y_{20}^{\pm}(t)\, dt\,, \quad v \geqslant 0\,. \tag{63}$$

Исследуем уравнение (61) методом последовательных приближений Пикара–Линделёфа [8]. Определим все элементы $z_m^{\pm}(v)$ бесконечной итерационной последовательности $\{z_m^{\pm}\}_{m=0}^{\infty}$. Пусть $z_0^{\pm}(v) \equiv 1$ при любом $v \geqslant 0$, а каждый $(m = 1, 2, \ldots)$ элемент $z_m^{\pm}$ — правая часть уравнения (61), в которой искомая компонента $y_1^{\pm}$ заменена элементом $z_{m-1}^{\pm}$:

$$z_m^{\pm}(v) = 1 + \int_0^v p_1^{\pm}(v_1)\, dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2)\; z_{m-1}^{\pm}(v_2)\, dv_2\,, \quad m \geqslant 1\,.$$

Следовательно, элемент $z_m^{\pm}$ является подсуммой $W_m^{\pm}$ слагаемых $z_0^{\pm} \equiv 1$ и $w_k^{\pm}$, $k = 1, \ldots, m$,

$$w_k^{\pm}(v) \equiv \int_0^v p_1(v_1)\, dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2)\, dv_2 \,\ldots \\ \ldots \int_0^{v_{2k-2}} p_1^{\pm}(v_{2k-1})\, dv_{2k-1} \int_0^{v_{2k-1}} p_2^{\pm}(v_{2k})\, dv_{2k} \tag{64}$$

бесконечного ряда

$$W^{\pm}(v) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k^{\pm}(v)\,. \tag{65}$$

Поэтому итерационная последовательность $\{z_m^{\pm}\}_{m=0}^{\infty}$ имеет предел $z_{\infty}^{\pm} = W^{\pm}$, являющийся искомым решением $y_1^{\pm}$, тогда и только тогда, когда сходится ряд $W^{\pm}$.

Покажем, что ряд $W^{\pm}$ сходится на всей полуоси $v \geqslant 0$, причем абсолютно и равномерно. Начнем с оценки модуля каждого слагаемого $w_k^{\pm}$, $k \geqslant 1$, этого ряда. По определению (64) слагаемое $w_k^{\pm}$ — интеграл кратности $2k$. Этот интеграл содержит k произведений функций $p_1^{\pm}(v_p)$ и $p_2^{\pm}(v_{p+1})$ с номером $p = 1, 2, \ldots, 2k-1$ и аргументами v_p и v_{p+1}, удовлетворяющими неравенству $v_{p+1} \leqslant v_p$. Согласно определениям (53) и неравенству (54), доказанному в лемме 1, модуль такого произведения не превосходит произведения производных $\partial_{v_p}\tau(v_p)$ и $\partial_{v_{p+1}}\tau(v_{p+1})$, а функция $\tau(v)$ равна нулю в точке $v = 0$.

Поэтому из равенства (64) следует равномерная по переменной v и довольно простая мажорантная оценка

$$\begin{aligned}\left| w_k^{\pm}(v) \right| \leqslant \int_0^v \partial_{v_1}\tau(v_1)\, dv_1 \int_0^{v_1} \partial_{v_2}\tau(v_2)\, dv_2 \ldots \\ \ldots \int_0^{v_{2k-2}} \partial_{v_{2k-1}}\tau(v_{2k-1})\, dv_{2k-1} \int_0^{v_{2k-1}} \partial_{v_{2k}}\tau(v_{2k})\, dv_{2k} = \frac{\tau^{2k}(v)}{(2k)!}\,. \quad (66)\end{aligned}$$

Используя ее и известное разложение гиперболического косинуса $\operatorname{ch}\tau$, получим следующую равномерную по аргументу v оценку ряда (65):

$$\left| W^{\pm}(v) \right| \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left| w_k(v) \right| \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{2k}(v)}{(2k)!} = \operatorname{ch}\tau(v) < \infty\,, \quad v \geqslant 0\,.$$

Следовательно, функция $\operatorname{ch}\tau$, аргумент которой τ всегда принимает только конечные значения, является ограниченной мажорантой ряда $W^{\pm}$. Поэтому на полуоси $v \geqslant 0$ ряд $W^{\pm}$ сходится равномерно и абсолютно по мажорантному признаку Веерштрасса [11].

Продолжим исследование ряда $W^{\pm}$. Оценка (66) означает, что при любом $k = 1, 2, \ldots$ интеграл в правой части равенства (64) сходится при любом $v \geqslant 0$. Следовательно, левая часть этого равенства — функция $w_k^{\pm}$ — непрерывна при любых $k = 1, 2, \ldots$ и $v \geqslant 0$.

Итак, при $v \geqslant 0$ ряд $W^{\pm}$ сходится абсолютно и равномерно, а все его слагаемые $w_k^{\pm}$ — непрерывные функции. Согласно теории рядов [11] ряд, обладающий такими свойствами, является непрерывной функцией на полуоси $v \geqslant 0$. В силу определений (64) и (65) слагаемых $w_n^{\pm}$ и их суммы $W^{\pm}$ эта сумма является решением $y_{10}^{\pm} = W^{\pm}$ уравнения (61).

Покажем от противного, что это уравнение не имеет другого решения, непрерывного при $v \geqslant 0$. Пусть $\tilde{y}_{10}^{\pm}$ — еще одно решение. Тогда разность $\zeta^{\pm} = y_{10}^{\pm} - \tilde{y}_{10}^{\pm}$ удовлетворяет тождеству

$$\zeta^{\pm}(v) \equiv \int_0^v p_1^{\pm}(v_1)\, dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2)\, \zeta^{\pm}(v_2)\, dv_2\,, \quad v \geqslant 0\,.$$

После $k \geqslant 2$ итераций это тождество благодаря равенству (64) станет тождеством

$$\zeta^{\pm}(v) \equiv \int_0^v p_1^{\pm}(v_1)\, dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2)\, w_{k-1}^{\pm}(v_2)\, \zeta^{\pm}(v_2)\, dv_2, \quad n = 2, 3, \ldots, \quad v \geqslant 0.$$

Такое тождество и оценки (54), (66) функций $p_1^{\pm} p_2^{\pm}$ и $w_{k-1}^{\pm}$ порождают неравенство

$$\left| \zeta^{\pm}(v) \right| \leqslant \max_{0 \leqslant t < v} \left| \zeta^{\pm}(t) \right| \frac{\tau^{2k}(v)}{(2k)!}\,, \quad n = 2, 3, \ldots\,, \quad v \geqslant 0\,.$$

В пределе $k \to \infty$ это неравенство вырождается в соотношение $|\zeta^{\pm}(v)| \leqslant 0$, $v \geqslant 0$, из которого следует, что $y_{10}^{\pm} = \tilde{y}_{10}^{\pm}$ при любом $v \geqslant 0$. Значит, исследуемое уравнение (61) имеет только одно решение $y_{10}^{\pm} = W^{\pm}$.

Теперь построим и исследуем решение $y_{20}^{\pm}$ второго уравнения системы (44). Это решение является интегралом (62). Положив в этом интеграле $y_{10}^{\pm} = W^{\pm}$, получаем интегральное представление искомого решения $y_{20}^{\pm}$ через уже найденный ряд $W^{\pm}$:

$$y_{20}^{\pm}(v) = \int_0^v p_2^{\pm}(t)\, W^{\pm}(t)\, dt\,, \quad v \geqslant 0\,. \tag{67}$$

Обсудим подынтегральную функцию, представленную произведением $p_2^{\pm} W^{\pm}$. На всей полуоси $v \geqslant 0$ ряд $W^{\pm}$ — ограниченная и непрерывная функция. По определению функция $p_2^{\pm}$ — произведение (39). В этом произведении потенциал V удовлетворяет условиям (9), функции $f_{\lambda 0}^{+}$ или $f_{\lambda 0}^{-}$ непрерывны на интервале $0 \leqslant v < \infty$ и имеют асимптотики (48), а интеграл $b^{\pm}$ непрерывен на полуоси $v \geqslant 0$. Поэтому при любом $v \geqslant 0$ интеграл (67) сходится и является непрерывной функцией.

Перейдем к выводу соотношения $y_{20}^{\pm}(v) = o(v^{4\lambda+2})$, $v \to 0$. Так как функция $y_{10}^{\pm}$ непрерывна в точке $v = 0$ справа и равна единице в этой точке, то $y_{10}^{\pm}(v) \sim 1 + o(1)$ при $v \to 0$. Покажем, что в этом же пределе функция $y_{20}^{\pm}$ быстро сходится к нулю. Для этого в представлении (62) положим $y_{10}^{\pm}(v) = 1 + o(1)$, воспользуемся определением (39) функции $p_2^{\pm}$ и заменим функцию $f_{\lambda 0}^{\pm}$ ее асимптотикой (48) при $v \to 0$. Таким образом получим старшее слагаемое асимптотики функции $y_{20}^{\pm}$ в виде интеграла

$$y_{20}^{\pm}(v) \sim -\int_0^v t^{4\lambda+5}\, V(t)\, dt\,, \quad v \to 0\,.$$

Такой интеграл убывает как $o(v^{4\lambda+2})$. Действительно, по правилу Лопиталя [11]

$$\lim_{v \to 0} v^{-4\lambda-2} \int_0^v t^{4\lambda+5}\, V(t)\, dt = \frac{1}{4\lambda+2} \lim_{v \to 0} v^4\, V(v) = 0\,.$$

Осталось убедиться в том, что интеграл (67) — единственное решение второго уравнения системы (44) в классе функций, непрерывных на полуоси $v \geqslant 0$. Предположим противное: пусть имеется еще одно решение $\tilde{y}_{20}^{\pm}$. Тогда согласно равенству (63) функция $y_{10}^{\pm} = W^{\pm}$ является интегральным образом и функции $y_{20}^{\pm}$, и функции $\tilde{y}_{20}^{\pm}$:

$$W^{\pm}(v) = 1 + \int_0^v p_1^{\pm}(t)\, y_{20}^{\pm}(t)\, dt\,, \quad W^{\pm}(v) = 1 + \int_0^v p_1^{\pm}(t)\, \tilde{y}_{20}^{\pm}(t)\, dt\,, \quad v \geqslant 0\,.$$

Следовательно, разность $y^{\pm}_{20} - \tilde{y}^{\pm}_{20}$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^v p^{\pm}_1(t)\ \left[\, y^{\pm}_{20}(t) - \tilde{y}^{\pm}_{20}(t) \,\right]\, dt \,\equiv 0\,, \quad v \geqslant 0\,.$$

После дифференцирования по аргументу v это тождество становится соотношением

$$p^{\pm}_1(v)\ \left[\, y^{\pm}_{20}(v) - \tilde{y}^{\pm}_{20}(v) \,\right] \equiv 0\,, \quad v \geqslant 0\,,$$

которое выполняется только в случае $y^{\pm}_{20}(v) \equiv \tilde{y}^{\pm}_{20}(v)$, $v \geqslant 0$. Следовательно, интеграл (67) — единственное непрерывное при $v \geqslant 0$ решение второго уравнения системы (44). Это утверждение завершает доказательство теоремы и анализ системы (44) при $2\lambda > -1$ и $n = 0$.

Перейдем к анализу этой же системы в случае $2\lambda > -1$, но $n > 0$. В этом случае согласно равенствам (41)–(44) слагаемые $r^{\pm}_{1n}$ и $r^{\pm}_{2n}$ — довольно сложные функции. Поэтому сначала необходимо доказать лемму 3 о предполагаемых свойствах таких слагаемых.

Лемма 3. *Предположим, что в случае $2\lambda > -1$, $n > 0$ все функции $y^{\pm}_{1k}$ и $y^{\pm}_{2k}$, содержащиеся в суммах (42), непрерывны при $v \geqslant 0$ и таковы, что $y^{\pm}_{1k} = o(1)$, $y_{2k} = o(v^{2\nu})$, если $v \to 0$. Тогда при условиях (2) и (3), $2\beta > 3(n+1)$, слагаемые $r^{\pm}_{1n}$ и $r^{\pm}_{2n}$ системы (44) непрерывны на полуоси $v \geqslant 0$ и имеют асимптотики $r^{\pm}_{1n} = o(1)$ и $r^{\pm}_{2n} = o(v^{2\nu})$, где $v \to 0$.*

Для доказательства потребуются асимптотики (48)–(50) компонент $f^{\pm}_{\lambda n}$ и $\theta^{\pm}_{\lambda n}$, определения (42)–(44) функций $a^{\pm}_{in}$, $d^{\pm}_{in}$, $r^{\pm}_{in}$, представления (39) функций $p^{\pm}_1$ и $p^{\pm}_2$, а также свойства функций $y^{\pm}_{10}$ и $y^{\pm}_{20}$, установленные в теореме 3. Функции $a^{\pm}_{1n}$, $a^{\pm}_{2n}$ и интегралы $d^{\pm}_{1n}$, $d^{\pm}_{2n}$ исследуем по аналогии с данным в п. 3.1 анализом интегралов (52).

Пусть $v \to 0$. Тогда при условиях (2) и любых k и ℓ, не превосходящих $n-1$,

$$v^3 V(v) = o(v^{-1})\,, \quad f^{\pm}_{\lambda\ell} = o(v^{2\nu+2\ell})\,, \quad \theta^{\pm}_{\lambda\ell} = o(v^{-2\nu})\,,$$
$$y^{\pm}_{1k} = \delta_{0k} + o(1)\,, \quad y^{\pm}_{2k} = o(v^{2\nu})\,.$$

Поэтому суммы $a^{\pm}_{1n}$ и $a^{\pm}_{2n}$ подчиняются следующим соотношениям:

$$a^{\pm}_{1n} \sim y^{\pm}_{10}\, v^3\, V\, f^{\pm}_{\lambda 0}\, \theta^{\pm}_{\lambda n} = o(v^{-1})\,,$$
$$a^{\pm}_{2n} \sim v^3\, V\, f^{\pm}_{\lambda 0}\, \sum_{k=0}^{n-1} y^{\pm}_{2k} \sum_{p=n-k} \theta^{\pm}_{\lambda p} = o(v^{2\nu-1}), \qquad v \to 0\,.$$

Следовательно, при $v \to 0$ интегралы $d^{\pm}_{1n}$ и $d^{\pm}_{2n}$ от сумм $a^{\pm}_{1n}$ и $a^{\pm}_{1n}$ имеют асимптотики $d^{\pm}_{1n} = o(1)$, $d^{\pm}_{2n} = o(v^{2\nu})$, а функции $p^{\pm}_1$ и $p^{\pm}_2$ таковы, что $p^{\pm}_1 = o(v^{-2\nu-1})$ и $p^{\pm}_2 = o(v^{2\nu-1})$. Так как слагаемые $r^{\pm}_{1n}$ и $r^{\pm}_{2n}$ содержат только интегралы $d_{1n}^{\pm}$, $d_{1n}^{\pm}$ и функции $p_1^{\pm}$, $p_2^{\pm}$, то $r_{1n}^{\pm} = o(1)$, а $r_{2n}^{\pm} = o(v^{2\nu})$, если $v \to 0$.

Итак, при условиях (2) функции $d_{in}^{\pm}$ и $r_{in}^{\pm}$, $i = 1, 2$, сходятся к нулю в точке $v = 0$ и являются непрерывными на полуинтервале $0 \leqslant v < \infty$. Осталось исследовать поведение этих функций в пределе $v \to \infty$.

Пусть $v \to \infty$. Тогда в суммах $a_{1n}^{\pm}$ и $a_{1n}^{\pm}$ все функции $y_{1k}^{\pm}$ и $y_{2k}^{\pm}$, $k \leqslant n - 1$, сходятся к их конечным значениям в точке $v = \infty$, а асимптотики всех произведений $f_{\lambda\ell}^{\pm} f_{\lambda p}^{\pm}$, $f_{\lambda\ell}^{\pm} \theta_{\lambda p}^{\pm}$ и $\theta_{\lambda\ell}^{\pm} \theta_{\lambda p}^{\pm}$ содержат в качестве множителя степенную функцию $v^{3(\ell+p)-1}$, $\ell + p = n = k$. Ее показатель принимает максимальное значение, равное $3n - 1$ при $k = 0$. Поэтому

$$a_{in}^{\pm}(v) \sim v^{3n+2} V(v) \left\{ \begin{array}{c} \exp(2v) \\ 1 \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2, \quad v \to \infty\,.$$

Так как потенциал V удовлетворяет условию (3), $2\beta > 3(n+1)$, в пределе $v \to \infty$ суммы $a_{1n}^{\pm}$ и $a_{1n}^{\pm}$ сходятся к нулю быстрее функции v^{-1}. Поэтому интегралы $d_{1n}^{\pm}$ и $d_{1n}^{\pm}$ от таких сумм в точке $v = \infty$ принимают конечные значения. Следовательно, функции $r_{1n}^{\pm}$ и $r_{2n}^{\pm}$ окажутся непрерывными в точке $v = \infty$ справа, если интегралы от функций $|p_1^{\pm}(t)|$ и $|p_2^{\pm}(t)|$ по области $v > 0$ сойдутся на их верхнем пределе $v = \infty$. Для такой сходимости достаточными являются условия (2) и условие (3), $\beta > 2$. Действительно, благодаря таким условиям и асимптотикам (48) и (49) компонент $f_{\lambda 0}^{\pm}$ и $\theta_{\lambda 0}^{\pm}$ функции $p_1^{\pm}$ и $p_2^{\pm}$ непрерывны в области $0 < v < \infty$ и сходятся к нулю при $v \to \infty$ быстрее функции v^{-1}.

Сформулируем два вывода. Если потенциал V удовлетворяет условию (3), $2\beta > 3(n+1)$, то все функции $a_{in}^{\pm}$, $d_{in}^{\pm}$ и $r_{in}^{\pm}$ ограничены в точке $v = \infty$. В случае $2\beta \leqslant 3(n+1)$ интегралы $d_{1n}^{\pm}$ и $d_{2n}^{\pm}$, а значит, и функции $r_{1n}^{\pm}$ и $r_{2n}^{\pm}$, вообще говоря, не имеют определенных пределов в точке $v = \infty$. Этими выводами завершим доказательство леммы.

Теорема 4. *Пусть $2\lambda > -1$, $n = 1, 2, \ldots, m$ и выполнены условия (2) и (3), $2\beta > 3(m+1)$. Тогда система уравнений (44) имеет единственное непрерывное на полуоси $v \geqslant 0$ решение $\{y_{1n}^{\pm}, y_{2n}^{\pm}\}$, причем такое, что $y_{1n}^{\pm} = o(1)$, $y_{2n}^{\pm} = o(v^{2\nu})$, если $v \to 0$.*

Для доказательства используем леммы 1 и 3 и применим два метода: метод последовательных приближений и метод математической индукции.

Пусть $n = 1$. Методом последовательных приближений построим формальное решение $y_{1n}^{\pm}$ первого $(i = 1, j = 2)$ уравнения системы (44) в виде бесконечного ряда

$$X^{\pm}(v) = r_{1n}^{\pm}(v) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{\pm}(v) \tag{68}$$

со слагаемыми

$$x_k^{\pm}(v) \equiv \int_0^{v} p_1^{\pm}(v_1)\, dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2)\, dv_2 \ \dots$$
$$\dots \int_b^{v_{2k-2}} p_1^{\pm}(v_{2k-1})\, dv_{2k-1} \int_0^{v_{2k-1}} p_1^{\pm}(v_{2k})\, r_{1n}^{\pm}(v_{2k})\, dv_{2k}\,, \quad k \geqslant 1\,. \qquad (69)$$

Исследуем ряд $X^{\pm}$. Согласно лемме 3 слагаемое $r_{1n}^{\pm}$, $n = 1$, является всюду ($v \geqslant 0$) непрерывной функцией. Максимальное значение $T_0^{\pm}$ модуля такой функции — конечное число. Построим мажорантную оценку $T_k^{\pm}$ слагаемого $x_k^{\pm}$ с номером $k \geqslant 1$. Сначала в интеграле (69) заменим все функции их модулями. Затем заменим функцию $\left| r_{1n}^{\pm} \right|$ числом $T_0^{\pm}$, а каждое ($p = 1, 2, \dots, 2k-1$) произведение функций $\left| p_1^{\pm}(v_p) \right|$ и $\left| p_2^{\pm}(v_{p+1}) \right|$ заменим превосходящим его согласно доказанному в лемме 1 неравенству (54) произведением производных $\partial_{v_p} \tau(v_p)$ и $\partial_{v_{p+1}} \tau(v_{p+1})$. Используя равенство $\tau(v) = 0$, $v = 0$, вычислим полученный интеграл $T_k^{\pm}$ и запишем искомую оценку в следующем виде:

$$\left| x_k^{\pm}(v) \right| \leqslant T_k^{\pm}(v) \equiv T_0^{\pm} \frac{\tau^{2k}(v)}{(2k)!} < \infty\,, \quad k = 1, 2, \dots\,, \quad v \geqslant 0\,. \qquad (70)$$

Благодаря такой оценке модуль $|X^{\pm}|$ ряда (68) не превосходит произведения $T_0^{\pm} \operatorname{ch} \tau$ на всей полуоси $v \geqslant 0$. Поэтому на той же полуоси ряд $X^{\pm}$ сходится абсолютно и равномерно и является непрерывным решением $y_{1n}^{\pm} = X^{\pm}$ первого ($i = 1, j = 2$) уравнения системы (44).

Исследуем поведение этого решения при $v \to 0$. В этом пределе согласно лемме 1 функция τ сходится к нулю, поэтому из оценки (70) следует, что все слагаемые $x_k^{\pm}$ ряда $X^{\pm}$ убывают быстрее слагаемого $r_{1n}^{\pm}$. Согласно лемме 3 при $n = 1$ верно соотношение $r_{1n}^{\pm} = o(1)$. Значит, $X^{\pm} \sim r_{1n}^{\pm} = o(1)$ и $y_{1n}^{\pm} = o(1)$, если $v \to 0$.

Теперь построим решение $y_{2n}^{\pm}$ второго ($i = 2, j = 1$) уравнения системы (44) как образ (43), $i = 2$, $j = 1$, ряда (68). Такой образ определяется равенством

$$y_{2n}^{\pm}(v) = d_{2n}^{\pm}(v) + \int_0^{v} p_2^{\pm}(t)\, X^{\pm}(t)\, dt\,. \qquad (71)$$

Заменой $X \to d_{1n}^{\pm}$ это равенство сводится к определению (44) уже исследованной в лемме 3 функции $r_{2n}^{\pm}$. Обе функции $X^{\pm}$ и $d_{1n}^{\pm}$ непрерывны на полуоси $v \geqslant 0$ и убывают как $o(1)$ при $v \to 0$. Поэтому функции $r_{2n}^{\pm}$ и $y_{2n}^{\pm}$ обладают одинаковыми свойствами: они непрерывны на полуоси $v \geqslant 0$ и убывают как $o(v^{2\nu})$ при $v \to 0$.

Итак, системе (44) с номером $n = 1$ удовлетворяют ряд $X^{\pm}$ и его образ (71). Другого непрерывного на полуоси $v \geqslant 0$ решения не существует, что нетрудно показать от противного способами, подробно изложенными при доказательстве предыдущей теоремы 3. Этим замечанием завершим доказательство теоремы в случае $n = 1$.

Согласно теореме 3 и данному выше анализу случая $n = 1$ компоненты $y^{\pm}_{1n}$ и $y^{\pm}_{2n}$ единственных решений систем (44) с номером $n = 0, 1$ непрерывны на полуоси $v \geqslant 0$ и убывают как $o(1)$ и $o(v^{2\nu})$, если $v \to 0$. Таким образом первый этап метода математической индукции завершен. Реализуем второй этап этого метода. Сначала предположим, что при некотором целом $p > 1$ все системы (44) с номерами $n \leqslant p$ однозначно разрешимы в классе непрерывных на полуоси $v \geqslant 0$ функций, удовлетворяющих соотношениям $y_{1n} = o(1)$ $y_{2n} = o(v^{2\nu})$, если $v \to 0$ и $n = 0, 1, \ldots, p$. Теперь докажем, что система (44) с номером $n = p + 1$ имеет единственное решение в том же классе функций. Благодаря предположенным выше свойствам компонент y_{in}, $n \leqslant p$, все утверждения леммы 3 остаются в силе и в случае $n = p + 1$. Следовательно, функции $r^{\pm}_{in}$, $n = p + 1$, непрерывны на полуоси $v \geqslant 0$, а в пределе $v \to 0$ удовлетворяют соотношениям $r^{\pm}_{1n} = o(1)$ и $r^{\pm}_{2n} = o(v^{2\nu})$. Этих свойств вполне достаточно для того, чтобы дословно повторить вывод всех формул (68)–(71) и их следствий, но уже в случае $n = p + 1$, и таким образом доказать существование единственного и непрерывного на полуоси $v \geqslant 0$ решения системы (44) при любом ее номере $n = 1, 2, \ldots, m$.

Приступим к анализу оставшегося случая $2\lambda = -1$.

Теорема 5. *Пусть $2\lambda = -1$, при $n = 0$ выполнены условия (9), а при $n = 1, 2, \ldots, m$ — условия (2) и (3), $2\beta > 3(m+1)$. Тогда система (44) имеет единственное непрерывное на полуоси $v \geqslant 0$ решение $\{y^{\pm}_{1n}, y^{\pm}_{2n}\}$, причем такое, что $y^{\pm}_{1n}(v) = \delta_{n0} + o\left(\ln^3 v\right) \ln^3 v$, а $y^{\pm}_{2n}(v) = o\left(\ln^2 v\right) \ln v$, если $v \to 0$.*

Доказательство отличается от доказательств леммы 3 и теорем 3 и 4 только тем, что вместо асимптотик (48)–(50) функций $f^{\pm}_{\lambda n}$ и $\theta^{\pm}_{\lambda n}$, $2\lambda > -1$, используются соответствующие асимптотики (48), (50) и (51) функций $f^{\pm}_{\lambda n}$ и $\theta^{\pm}_{\lambda n}$, $2\lambda = -1$, а для оценки произведения $|p^{\pm}_1 \, p^{\pm}_2|$ вместо неравенства (54) применяется неравенство (59), доказанное в лемме 2.

Только теперь можно сформулировать и доказать итоговую теорему.

Теорема 6. *Пусть $2\lambda \geqslant -1$, при $n = 0$ выполнены условия (9), а при $n = 1, 2, \ldots, m$ — условия (2) и (3), $2\beta > 3(m + 1)$. Тогда задача Коши (11), (12) имеет непрерывное на полуоси $v \geqslant 0$ решение $\{c^{\pm}_n, s^{\pm}_n\}$, причем такое, что*

$$
\begin{aligned}
&c^{\pm}_n(v) = \delta_{n0} + o\left(\ln^3 v\right) \ln^3 v, && s^{\pm}_n(v) = o\left(\ln^2 v\right) \ln v, && 2\lambda = -1, && v \to 0;\\
&c^{\pm}_n(v) = \delta_{n0} + o(1), && s^{\pm}_n(v) = o(v^{2\lambda+4}), && 2\lambda > -1, && v \to 0.
\end{aligned}
$$

На полуоси $v \geqslant 0$ компоненты c^{+}_0 и s^{+}_0 или c^{-}_0 и s^{-}_0 не имеют общих нулей.

Доказательство несложное. Действительно, существование, единственность и непрерывность функций $c^{\pm}_n$ и $s^{\pm}_n$ на полуоси $v \geqslant 0$ следует из однозначности и непрерывности представлений (40) этих функций через функции $y_{1n}^{\pm}$ и $y_{2n}^{\pm}$ и теорем 3–5. Благодаря тем же представлениям в пределе $v \to 0$ функции $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$ ведут себя так же, как функции $y_{1n}^{\pm}$ и $y_{2n}^{\pm}$.

Осталось доказать, что при любом $\lambda \geqslant -1/2$ на полуоси $v \geqslant 0$ нет точки, в которой обе функции c_0^+ и s_0^+ или c_0^- и s_0^- равны нулю. Ключевыми для доказательства от противного будут два факта: функция $c_0^{\pm}$ непрерывна в точке $v = 0$ и равна единице в этой точке.

Предположим противное: пусть $c_0^{\pm}(v) = 0$ и $s_0^{\pm}(v) = 0$ в точке $v = \infty$. Эти равенства используем как начальные условия для уравнений (36), $n = 0$, в области $v > 0$. Исследуем сформулированную таким образом задачу Коши. Подстановкой

$$t = 1 - \exp(-v)\,, \quad c_0^{\pm}(v) = x_1^{\pm}(t)\,, \quad s_0^{\pm}(v) = x_2^{\pm}(t)$$

сведем ее к линейной относительно неизвестных функций $x_1^{\pm}$ и $x_2^{\pm}$ задаче Коши на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Запишем такую задачу в виде системы двух уравнений

$$\partial_t x_i^{\pm}(t) = g_i^{\pm}(t, x_1^{\pm}, x_2^{\pm})\,, \quad i = 1,2\,, \quad t \in [0,1]\,,$$

с тривиальными начальными условиями $x_i^{\pm}(t) = 0$, $i = 1,2$, в точке $t = 1$.

На полуинтервале $0 < t \leqslant 1$ функции $g_1^{\pm}$ и $g_2^{\pm}$ непрерывны по переменной t и имеют непрерывные частные производные по переменным $x_1^{\pm}$ и $x_2^{\pm}$. Следовательно, выполнены оба достаточных условия теоремы Пикаро [8]. По этой теореме на полуинтервале $0 < t \leqslant 1$ обсуждаемая задача Коши для функций $x_i^{\pm}$, $i = 1,2$, имеет единственное и притом непрерывное решение. Очевидно, что им является тривиальное и непрерывное решение $x_i^{\pm}(t) \equiv 0$, $i = 1,2$, для всех $t \in (0,1]$. Так как $c_0^{\pm}(v) = x_1^{\pm}(t)$, то $c_0^{\pm}(v) = 0$ при любом $v > 0$, но $c_0^{\pm}(v) = 1$ в точке $v = 0$. Следовательно, в этой точке функция $c_0^{\pm}$ терпит разрыв первого рода, но по теореме 6 эта функция непрерывна в точке $v = 0$ справа. Полученное противоречие означает, что ранее высказанное предположение о том, что $c_0^{\pm}(\infty) = 0$ и $s_0^{\pm}(\infty) = 0$, не верно. Аналогичным образом нетрудно показать, что не существует конечного значения переменной v, при котором обе компоненты $c_0^{\pm}$ и $s_0^{\pm}$ обращаются в нуль. Теорема доказана.

Сформулируем важные следствия леммы 3 и теорем 4–6. Условия (2) и (3), $2\beta > 3(m+1)$, являются достаточными для того, чтобы все функции $d_{in}^{\pm}$, $r_{in}^{\pm}$, $y_{in}^{\pm}$, $c_{in}^{\pm}$ и $s_{in}^{\pm}$ с номером $n = 1, 2, \ldots m$ оказались непрерывными на полуоси $v \geqslant 0$ и, следовательно, ограниченными в точке $v = \infty$. Как пояснялось в лемме 3, при условиях (2) и (3), $2\beta \leqslant 3(m+2)$, интегралы $d_{1n}^{\pm}$ и $d_{2n}^{\pm}$, $n = m+1$, могут расходиться в пределе $v \to \infty$. Поэтому в этом же случае согласно доказательствам теорем 4–6 все функции $y_{in}^{\pm}$, $c_{in}^{\pm}$ и $s_{in}^{\pm}$ с номером $n = m+1$, вообще говоря, не принимают определенных значений в точке $v = \infty$.

4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ

В настоящем разделе решим следующую задачу: при любом значении квантового числа λ вывести и исследовать низкоэнергетические асимптотики ($q \to 0$) редуцированных амплитудных функций $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$, функции эффективного радиуса, фазы $\delta^{\pm}_{\lambda}$, сечения $\sigma^{\pm}_{\lambda}$ и радиальной волновой функции $u^{\pm}_{\lambda}$ ядерно-кулоновского рассеяния. Для решения поставленной задачи используем доказанные в теореме 6 свойства компонент $c^{\pm}_n$ и $s^{\pm}_n$.

4.1. Асимптотики редуцированных амплитудных функций. Сформулируем теорему о низкоэнергетических асимптотиках функций $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$.

Теорема 7. *Пусть* $2\lambda \geqslant -1$, $m \geqslant 1$ *и выполнены условия (2) и (3),* $2\beta > 3(m+1)$. *Тогда имеют место разбиения*

$$\begin{aligned} c^{\pm}(v,q) &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{2n}\, c^{\pm}_n(v) + q^{2m}\, C^{\pm}(v,q)\,, \\ s^{\pm}(v,q) &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{2n}\, s^{\pm}_n(v) + q^{2m}\, S^{\pm}(v,q)\,, \end{aligned} \tag{72}$$

в которых функции $C^{\pm}$ *и* $S^{\pm}$ *являются непрерывными на полуоси* $v \geqslant 0$ *и сходятся к компонентам* $c^{\pm}_m$ *и* $s^{\pm}_m$ *в пределе* $q \to 0$.

Для доказательства в задаче Коши (28), (29) заменим функции $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$ соответствующими суммами (72). Затем, используя системы уравнений (36) с номерами $n < m$, приведем подобные слагаемые. В результате на интервале $v > 0$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\partial_v C^{\pm}(v,q) = \\ &\quad = v^3\, V\, \left\{ \left[C^{\pm}(v,q)\, f^{\pm}_{\lambda}(v,q) + S^{\pm}(v,q)\, \theta^{\pm}_{\lambda}(v,q) \right]\, \theta^{\pm}_{\lambda}(v,q) + R^{\pm}_1(v,q) \right\}, \\ &\partial_v S^{\pm}(v,q) = \\ &\quad = -v^3\, V\, \left\{ \left[C^{\pm}(v,q)\, f^{\pm}_{\lambda}(v,q) + S^{\pm}(v,q)\, \theta^{\pm}_{\lambda}(v,q) \right]\, f^{\pm}_{\lambda}(v,q) + R^{\pm}_2(v,q) \right\} \end{aligned} \tag{73}$$

с начальными условиями

$$C^{\pm}(v,q) = 0\,, \quad S^{\pm}(v,q) = 0\,, \quad v = 0\,. \tag{74}$$

Обсудим слагаемые $R^{\pm}_1$ и $R^{\pm}_2$ системы (73). Эти слагаемые содержат компоненты $c^{\pm}_n$, $s^{\pm}_n$, $n < m$, и функции $A^{\pm}_{\lambda}$ и $B^{\pm}_{\lambda}$, которые порождаются следующими разбиениями рядов (34):

$$\begin{aligned} f^{\pm}_{\lambda}(v,q) &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{2n}\, f^{\pm}_{\lambda n}(v) + q^{2m}\, A^{\pm}_{\lambda}(v,q), \\ \theta^{\pm}_{\lambda}(v,q) &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{2n}\, \theta_{\lambda n}(v) + q^{2m}\, B^{\pm}_{\lambda}(v,q). \end{aligned} \tag{75}$$

По теореме 6 все компоненты $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$ с номерами $n < m$ непрерывны на полуоси $v \geqslant 0$. Как показано в работе [6], ряды (34) сходятся равномерно. Следовательно, этим же свойством обладают и их остатки $q^{2m}\,A_\lambda^{\pm}$ и $q^{2m}\,B_\lambda^{\pm}$, содержащие компоненты $f_{\lambda n}^{\pm}$ и $\theta_{\lambda n}^{\pm}$, $n \geqslant m$. Такие компоненты имеют асимптотики (48)–(51) и поэтому при ограничениях (2) и (3), $2\beta > 3(m+1)$, на потенциал V интегрируемы на любом отрезке $[0, v]$, $v > 0$, с весом $t^3 V(t)$. В силу перечисленных выше свойств функций $c_n^{\pm}$, $s_n^{\pm}$, $f_{\lambda n}^{\pm}$, $\theta_{\lambda n}^{\pm}$ и остатков $q^{2m}\,A_\lambda^{\pm}$ и $q^{2m}\,B_\lambda^{\pm}$ произведения $t^3 V(t) R_1^{\pm}(t,q)$ и $t^3 V(t) R_2^{\pm}(t,q)$ интегрируемы на любом отрезке $[0, v]$, $v > 0$, и при любом $q \geqslant 0$. Это свойство слагаемых $R_1^{\pm}$ и $R_2^{\pm}$ является достаточным для доказательства однозначной разрешимости задачи Коши (73), (74) в классе функций, непрерывных на полуоси $v \geqslant 0$.

Поясним ключевые этапы дальнейшего анализа этой задачи. Сначала вводится интеграл

$$B^{\pm}(v,q) \equiv \int_0^v t^3\, V(t)\, f_\lambda^{\pm}(t)\, \theta_\lambda^{\pm}(t)\, dt\,,$$

затем подстановкой

$$C^{\pm}(v) = z_1^{\pm}(v) \exp\left[\, B^{\pm}(v,q) \,\right], \qquad S^{\pm}(v) = z_2^{\pm}(v) \exp\left[\, -B^{\pm}(v,q) \,\right]$$

задача Коши (73), (74) сводится к недиагональной системе интегральных уравнений для искомых функций $z_1^{\pm}$ и $z_2^{\pm}$. Из такой системы после одной итерации получается диагональная система интегральных уравнений. Эта система исследуется методом последовательных приближений по схеме, подробно изложенной в работе [7]. Таким образом, доказывается, что задача Коши (73), (74) имеет единственное решение $\{C^{\pm}, S^{\pm}\}$, компоненты $C^{\pm}$ и $S^{\pm}$ которого непрерывны при $v \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$. Поэтому и в уравнениях (73), и в начальных условиях (74) можно перейти к пределу $q \to 0$. В итоге получится задача Коши для функций $C^{\pm}(v,0)$ и $S^{\pm}(v,0)$. Заменой обозначений $C^{\pm}(v,0) \to c_m^{\pm}(v)$ и $S^{\pm}(v,0) \to s_m^{\pm}(v)$ эта задача сводится к уже исследованной задаче Коши (36), (37) для компонент $c_m^{\pm}$ и $s_m^{\pm}$. Следовательно, $C^{\pm}(v,q) \to c_m^{\pm}(v)$ и $S^{\pm}(v,q) \to s_m^{\pm}(v)$, если $q \to 0$.

Осталось выявить смысл разбиений (72). Для этого символами $T_1^{\pm}$ и $T_2^{\pm}$ обозначим суммы функций $q^{2n} c_n^{\pm}$ и $q^{2n} s_n^{\pm}(v)$ с номером $n = 0, 1, \ldots, m-1$. Разбиения (72) означают, что на всей полуоси $v \geqslant 0$ и, в частности, в ее бесконечно удаленной точке $v = \infty$ суммы $T_1^{\pm}$ и $T_2^{\pm}$ являются низкоэнергетическими приближениями функций $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$ с абсолютной точностью $O(q^{2m})$. Этим пояснением завершим доказательство теоремы.

Теперь обсудим предлагаемый способ построения низкоэнергетических приближений нормировочного множителя $N^{\pm}$, фазы $\delta_\lambda^{\pm}$, сечения $\sigma_\lambda^{\pm}$ и радиальной волновой функции $u_\lambda^{\pm}$ рассеяния квантовой частицы p_1 в состоянии $|\lambda, q\rangle$. Функции $N_m^{\pm}(q)$, $\operatorname{tg}\delta_{\lambda m}^{\pm}(q)$, $\sigma_{\lambda m}^{\pm}(q)$ и $u_{\lambda m}^{\pm}(v,q)$ и определим как правые части соответствующих равенств (30)–(33), в которых функции $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$ заменены их приближениями $T_1^{\pm}$ и $T_2^{\pm}$. По определению функции $N_m^{\pm}$, $\operatorname{tg}\delta_{\lambda m}^{\pm}$, $\sigma_{\lambda m}^{\pm}$ и $u_{\lambda m}^{\pm}$ содержат только известные функции C_λ, h, $f_{\lambda n}$, $\theta_{\lambda n}$ и компоненты $c_n^{\pm}$, $s_n^{\pm}$, $n \leqslant m-1$, и являются низкоэнергетическими приближениями соответствующих функций $N^{\pm}$, $\operatorname{tg}\delta_\lambda^{\pm}$ и $\sigma_\lambda^{\pm}$ с абсолютной точностью порядка $O(q^{2m})$. Следовательно, задача о построении низкоэнергетических приближений $N_m^{\pm}$, $\operatorname{tg}\delta_{\lambda m}^{\pm}$, $\sigma_{\lambda m}^{\pm}$ и $u_{\lambda m}^{\pm}$ сводится к вычислению конечного числа компонент $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$, $n = 0, 1, \dots m-1$. В этом заключается первое преимущество предлагаемого асимптотического метода. Второе преимущество состоит в том, что все такие компоненты удовлетворяют конечной, энергонезависимой и рекуррентной цепочке задач Коши (36), (37), численный анализ которых довольно прост.

В следующих п. 4.2–4.4 для анализа особенностей низкоэнергетических приближений функции эффективного радиуса, фазы $\delta_\lambda^{\pm}$, сечения $\sigma_\lambda^{\pm}$ и нормировочного множителя $N^{\pm}$ потребуются свойства предельных при $v \to \infty$ значений компонент $c_0^{\pm}$ и $s_0^{\pm}$.

Покажем, что $c_0^{+}(v) \neq 0$ при любом $v \geqslant 0$. По теореме 1 при любом $q > 0$ амплитудные функции c и s не имеют общих нулей. Следовательно, верно соотношение

$$|c(\rho,\eta)| + |s(\rho,\eta)| \neq 0\,, \quad \rho \geqslant 0\,.$$

Заменим в нем функции c и s правыми частями равенств (23), в которых представим функции $c^{\pm}$ и $s^{\pm}$ рядами (35). По теореме 7 такие ряды сходятся равномерно, поэтому в полученном соотношении можно перейти к пределу $q \to 0$ и, используя асимптотики (18) и (26) функций C_λ^2 и h, вывести два неравенства:

$$|c_0^{+}(v)| \neq 0\,, \quad |c_0^{-}(v)| + \pi |s_0^{-}(v)| \neq 0\,, \quad v \geqslant 0\,.$$

Первое из них означает, что компонента c_0^{+} всегда отлична от нуля, а второе подтверждает утверждение теоремы 6 об отсутствии общих нулей у компонент c_0^{-} и s_0^{-}.

Сформулируем важное следствие этой теоремы и доказанного выше неравенства $c_0^{+}(v) \neq 0$, $v \geqslant 0$. При $v = \infty$ возможны только три случая. Случай 1: $c_0^{\pm}(v) \neq 0$ и $s_0^{\pm}(v) \neq 0$. Случай 2: $s_0^{\pm}(v) = 0$, но $c_0^{\pm}(v) \neq 0$. Случай 3: $c_0^{-}(v) = 0$, но $s_0^{-}(v) \neq 0$.

В п. 4.2–4.4 для полноты исследуем все такие случаи. Предполагается, что потенциал V удовлетворяет условиям (2) и условиям (3), в которых $2\beta > 3(m+1)$, а $m = 3$. При таких условиях по теореме 6 компоненты $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$, $n = 0, 1, 2, 3$, ограничены в точке $v = \infty$, а по теореме 7 верны разбиения (35) с номером $m = 3$. В п. 4.5 выясним, какие из полученных в п. 4.2–4.4 асимптотических соотношений остаются в силе при более слабых условиях (3) с параметром $2\beta > 3(m+1)$, но $m < 3$.

4.2. Функция эффективного радиуса и ее асимптотика. Для данного состояния $|q,\lambda\rangle$ рассеяния квантовой частицы p_1 определим функцию эффективного радиуса как функцию волнового числа q, удовлетворяющую трем условиям. Эта функция должна содержать котангенс фазы $\delta_\lambda^\pm(q)$ и иметь низкоэнергетическую $(q \to 0)$ асимптотику в виде ряда Маклорена по четным степеням аргумента q, старшее слагаемое этого ряда должно быть конечной, но ненулевой константой.

Приступим к построению функции эффективного радиуса для состояния $|q,\lambda\rangle$. Введем вспомогательную функцию $K^\pm(v,q)$. Пусть

$$K^\pm(v,q) \equiv (\nu!)^2\, q^{2\lambda+1}\, C_\lambda^2(\pm|\eta|)\, \mathrm{ctg}\, \delta_\lambda^\pm(v,q) - h(q)\,, \tag{76}$$

где функции $C_\lambda(\pm|\eta|)$ и $h(q)$ заданы равенствами (17) и (21), (24), (25), а фазовая функция $\delta_\lambda^\pm(v,q)$ представляется через функции $c^\pm(v,q)$ и $s^\pm(v,q)$ формулой (31). Используя эту формулу и разбиения (35), $m = 3$, запишем функцию $K^\pm(v,q)$ в виде

$$K^\pm(v,q) = \frac{c^\pm(v,q)}{s^\pm(v,q)} = \frac{c_0^\pm(v) + q^2\, c_1^\pm(v) + q^4\, c_2^\pm(v) + q^6\, C^\pm(v,q)}{s_0^\pm(v) + q^2\, s_1^\pm(v) + q^4\, s_2^\pm(v) + q^6\, S^\pm(v,q)}\,. \tag{77}$$

Далее для краткости символами $A(q)$ и B будем обозначать значения функций $A(v,q)$ и $B(v)$ в бесконечно удаленной точке $v = \infty$. Согласно теоремам 2 и 6 функции $c^\pm(v,q)$ и $s^\pm(v,q)$ и все их компоненты $c_n^\pm(v)$, $s_n^\pm(v)$, $n \leqslant m = 3$, непрерывны в бесконечно удаленной точке $v = \infty$ и, следовательно, принимают в этой точке вполне определенные и конечные значения $c^\pm(q)$, $s^\pm(q)$ и $c_n^\pm$, $s_n^\pm$. Поэтому в соотношениях (76) и (77) можно перейти к пределу $v \to \infty$ и таким образом получить представление функции $K(q)$ через фазу рассеяния $\delta_\lambda^\pm(q)$ и представление этой же функции через предельные значения функций $c^\pm(v,q)$ и $s^\pm(v,q)$ и их компонент $c_n^\pm(v)$, $s_n^\pm(v)$:

$$\begin{aligned} K^\pm(q) = (\nu!)^2\, q^{2\lambda+1}\, C_\lambda^2(\pm|\eta|)\, \mathrm{ctg}\, \delta_\lambda^\pm(q) - h(q) \;=&\\ = \frac{c^\pm(q)}{s^\pm(q)} = \frac{c_0^\pm + q^2\, c_1^\pm + q^4\, c_2^\pm + q^6\, C^\pm(q)}{s_0^\pm + q^2\, s_1^\pm + q^4\, s_2^\pm + q^6\, S^\pm(q)}\,.& \end{aligned} \tag{78}$$

Из равенств (77) и (78) следует, что обе функции $K(v,q)$ и $K(q)$ являются четными функциями переменной $q \geqslant 0$. Исследуем эти равенства в трех случаях.

Случай 1. Пусть в точке $v = \infty$ обе функции $c_0^\pm(v)$ и $s_0^\pm(v)$ не равны нулю ($c_0^\pm \neq 0$, $s_0^\pm \neq 0$). Запишем функцию $K^\pm(v,q)$, представленную дробью (77), в виде ряда Маклорена по аргументу q с остаточным слагаемым $P^{\pm}(v,q) = O(q^6)$

$$K^{\pm}(v,q) = \sum_{n=0}^{2} q^{2n}\, M_n^{\pm}(v,q) + P^{\pm}(v,q)\,. \tag{79}$$

В этом ряду

$$M_0^{\pm}(v) = c_0^{\pm}(v)/s_0^{\pm}(v)\,, \quad M_1(v) = \left[\, (c_1^{\pm}(v) - s_1^{\pm}(v)\, M_0^{\pm}(v) \,\right] / s_0^{\pm}(v)\,, \tag{80}$$

и каждая функция $M_n^{\pm}(v)$, $n = 0, 1, 2$, представляется конечной суммой дробей, знаменатели которых — целые степени $(s_0^{\pm}(v))^p$, $p \leqslant 2n$, а числители выражаются через компоненты $c_m^{\pm}(v)$ и $s_m^{\pm}(v)$ с номерами $m \leqslant n$. Поэтому обсуждаемый ряд Маклорена (79) сходится при любом значении аргумента v, отличном от нуля, функции $s_0^{\pm}(v)$. В рассматриваемом случае эта функция не равна нулю в точке $v = \infty$. Следовательно, все функции $P^{\pm}(v,q)$ и $M_n^{\pm}(v)$, $n = 0, 1, 2$, а значит, и функции $a_1^{\pm}(v)$ и $r_1^{\pm}(v)$, заданные формулами

$$\begin{aligned} a_1^{\pm}(v) &\equiv -\frac{1}{M_0^{\pm}(v)} = -\frac{s_0^{\pm}(v)}{c_0^{\pm}(v)}\,, \\ r_1^{\pm}(v) &\equiv 2\, M_1^{\pm}(v) = \frac{2}{s_0^{\pm}(v)} \left[c_1^{\pm}(v) - s_1^{\pm}(v)\, \frac{c_0^{\pm}(v)}{s_0^{\pm}(v)} \right]\,, \end{aligned} \tag{81}$$

ограничены в пределе $v \to \infty$, а функция $a_1^{\pm}(v)$ в этом же пределе принимает ненулевое значение. Поэтому и в определении (77) функции $K(v,q)$, и во всех соотношениях (79)–(81) можно положить $v = \infty$. В результате получится следующее представление предела $K^{\pm}(q)$ исследуемой функции $K^{\pm}(v,q)$:

$$\begin{aligned} K^{\pm}(q) = (\nu!)^2\, q^{2\lambda+1}\, C_\lambda^2(\pm|\eta|) \operatorname{ctg} \delta_\lambda^{\pm}(q) - h(q) \;= \\ = \frac{c^{\pm}(q)}{s^{\pm}(q)} = -\frac{1}{a_1^{\pm}} + \frac{1}{2}\, r_1^{\pm}\, q^2 + t_1^{\pm}(q)\,. \end{aligned} \tag{82}$$

В этом представлении $a_1^{\pm} \neq 0$ и $r_1^{\pm}$ — предельные ($v \to \infty$) значения функций $a_1^{\pm}(v)$ и $r_1^{\pm}(v)$, а остаточное слагаемое $t_1^{\pm}(q)$ убывает как $O(q^4)$, если $q \to 0$. Поэтому в этом пределе обсуждаемое представление является низкоэнергетической асимптотикой функции $K^{\pm}(q)$. Функцию $K_1^{\pm}(q)$, равную функции $K^{\pm}(q)$, и коэффициенты $a_1^{\pm}$ и $r_1^{\pm}$ назовем функцией эффективного радиуса, длиной рассеяния и эффективным радиусом.

Функция эффективного радиуса для двумерного рассеяния суперпозицией $V^c + V^s$ впервые исследована в работе [1], но только в случае $2\lambda = -1$. Полученное в этой работе представление такой функции совпадет с формулой (82), если в ней положить $\lambda = -1/2$.

Теперь поясним первый способ вычисления функций $K^{\pm}(v,q)$, $a_1^{\pm}(v)$ и $r_1^{\pm}(v)$. Сначала необходимо решить задачи Коши (28), (29) и (36), (37) для функций $c^{\pm}(v,q)$ и $s^{\pm}(v,q)$ и их компонент $c_n^{\pm}(v)$ и $s_n^{\pm}(v)$, $n=0,1$, а затем воспользоваться представлениями (77) и (81).

Предложим другой способ вычисления функций $K(v,q)$, $a_1^{\pm}(v)$ и $r_1^{\pm}(v)$, в котором не требуется решение упомянутых выше задач Коши.

Начнем с функции $K(v,q)$, равной отношению функций $c^{\pm}(v,q)$ и $s^{\pm}(v,q)$. Согласно условиям (29) в точке $v=0$ функция $s^{\pm}(v,q)$ равна нулю. Следовательно, в этой точке функция $K(v,q)$ неограничена. Поэтому вместо нее удобнее использовать функцию $L^{\pm}(v,q)$, определенную равенствами

$$L^{\pm}(v,q)=\frac{1}{K^{\pm}(v,q)}=\frac{s^{\pm}(v,q)}{c^{\pm}(v,q)},$$

и поэтому равную нулю в точке $v=0$. Используя эти равенства, выразим производную $\partial_v L^{\pm}$ через производные $\partial_v c^{\pm}$ и $\partial_v s^{\pm}$, которые заменим правыми частями уравнений (28) и в результате для функции получим следующую нелинейную задачу:

$$2\partial_v L^{\pm}(v,q)=v^3V(v)\left[f_{\lambda}^{\pm}(v,q)-L^{\pm}(v,q)\theta_{\lambda}^{\pm}(v,q)\right]^2,\ v>0;\ L(v,q)|_{v=0}=0.$$

Теперь исследуем функцию $a_1^{\pm}(v)$, равную по ее определению (81) дроби $-s_0^{\pm}(v)/c_0(v)$. Согласно начальным условиям (37) в точке $v=0$ числитель этой дроби равен нулю. Поэтому $a_1^{\pm}(v)=0$, если $v=0$. Продифференцируем определение (81) функции $a_1^{\pm}(v)$ по переменной v, а затем заменим производные $\partial_v c_0^{\pm}$ и $\partial_v s_0^{\pm}$ правыми частями уравнений (36) и в итоге покажем, что функция $a_1^{\pm}(v)$ подчиняется нелинейной задаче

$$\partial_v a_1^{\pm}(v)=v^3\,V(v)\,\left[\,f_{\lambda 0}^{\pm}(v)-a_1^{\pm}(v)\,\theta_{\lambda 0}^{\pm}(v)\,\right]^2\,,\quad v>0\,;\quad a_1^{\pm}(v)|_{v=0}=0\,.$$

Теперь сформулируем и решим задачу Коши для функции $r_1^{\pm}(v)$. Если в ее определении (81) устремить аргумент v к нулю и заменить все компоненты $c_n^{\pm}(v)$ и $s_n^{\pm}(v)$, $n=0,1$, их асимптотиками, упомянутыми в теореме 6, то получится начальное условие $r_1^{\pm}(v)=0$, $v=0$. Продифференцируем определение (81) функции $r_1^{\pm}(v)$ по переменной v. В полученном равенстве заменим производные $\partial_v c_n^{\pm}$ и $\partial_v s_n^{\pm}$ правыми частями соответствующих уравнений (36), а затем, используя формулы (81), выразим все комбинации компонент $c_n^{\pm}(v)$ и $s_n^{\pm}(v)$, $n=0,1$, через функции $a_1^{\pm}(v)$ и $r_1^{\pm}(v)$. В итоге выведем следующую задачу Коши:

$$\partial_v r_1^{\pm}(v)+\xi^{\pm}(v)\left[\,(r_1^{\pm}(v)-\phi^{\pm}(v)\,\right]=0\,,\quad v>0\,;\quad r_1^{\pm}(v)|_{v=0}=0\,,$$

где по определению

$$\xi^{\pm}(v) \equiv 2\, v^3 V(v)\, f^{\pm}_{\lambda 0}(v) \left[\frac{f^{\pm}_{\lambda 0}(v)}{a^{\pm}_1(v)} - \theta^{\pm}_{\lambda 0} \right] ,$$
$$\phi^{\pm}(v) \equiv \frac{2}{f^{\pm}_{\lambda 0}(v)} \left[\frac{f^{\pm}_{\lambda 1}(v)}{a^{\pm}_1(v)} - \theta^{\pm}_{\lambda 1}(v) \right] .$$

Единственное решение такой задачи Коши имеет вид

$$r^{\pm}_1(v) = \frac{1}{z^{\pm}(v)} \int_0^v \partial_t z^{\pm}(t)\, \phi^{\pm}(t)\, dt\,, \quad z^{\pm}(v) \equiv \exp\left(\int_0^v \xi^{\pm}(t)\, dt \right) ,$$

и поэтому является интегральным представлением функции $r^{\pm}_1(v)$ через функцию $a^{\pm}_1(v)$.

Стоит отметить, что обе функции $a^{\pm}_1(v)$ и $r^{\pm}_1(v)$ обладают прозрачным физическим смыслом: значения $a^{\pm}_1(d)$ и $r^{\pm}_1(d)$ этих функций в некоторой точке $v_d \geqslant 0$ являются длиной рассеяния и эффективным радиусом в случае потенциала $V(v)$, «обрезанного» в этой точке.

Случай 2. Предположим, что в точке $v = \infty$ функция $s^{\pm}_0(v)$ обращается в нуль, а функция $s^{\pm}_1(v)$ принимает ненулевое значение $s^{\pm}_1$. По теореме 6 в той же точке $v = \infty$ функция $c^{\pm}_0(v)$ отлична от нуля. Итак, $s^{\pm}_0 = 0$, $s^{\pm}_1 \neq 0$ и $c^{\pm}_0 \neq 0$. Следовательно, длина рассеяния $a^{\pm}_1 = -s^{\pm}_0/c^{\pm}_0$ равна нулю, и поэтому необходимо переопределить функцию эффективного радиуса. Для этого сначала рассмотрим представление функции $K(q)$ в виде дроби (78), содержащей предельные значения компонент $c^{\pm}_n(v)$ и $s^{\pm}_n(v)$. Так как $s^{\pm}_0 = 0$, $s^{\pm}_1 \neq 0$ и $c^{\pm}_0 \neq 0$, произведение $K^{\pm}_2 \equiv q^2 K^{\pm}(q)$ в пределе $q \to 0$ равно конечной и ненулевой константе. Поэтому в рассматриваемом случае такое произведение считаем функцией эффективного радиуса. Представим ее формулами

$$K^{\pm}_2(q) \equiv \lim_{v\to\infty} q^2\, K(v,q) = (\nu!)^2\, q^{2\lambda+3}\, C^2_{\lambda}(\pm|\eta|) \operatorname{ctg} \delta^{\pm}_{\lambda}(q) - q^2\, h(q) \;=$$
$$= -\frac{1}{a^{\pm}_2} + \frac{1}{2}\, q^2\, r^{\pm}_2 + t^{\pm}_2(q)\,, \quad (83)$$

где $t^{\pm}_2(q) = O(q^4)$ при $q \to 0$, а длина рассеяния $a^{\pm}_2$ и эффективный радиус $r^{\pm}_2$ определяются соответствующими пределами:

$$a^{\pm}_2 \equiv -\lim_{v\to 0} \frac{s^{\pm}_1(v)}{c^{\pm}_0(v)}\,, \quad r^{\pm}_2 \equiv \lim_{v\to 0} \frac{2}{s^{\pm}_1(v)} \left[c^{\pm}_1(v) + \frac{s^{\pm}_2(v)}{a^{\pm}_2(v)} \right] .$$

Случай 3. Пусть в точке $v = \infty$ функция $c^{-}_0(v)$ обращается в нуль, но функция $c^{-}_1(v)$ принимает ненулевое значение c^{-}_1. Тогда по теореме 6 в этой же точке $s_0^- \equiv s_0^-(v) \neq 0$. Итак, $c_0^- = 0$, $c_1^- \neq 0$ и $s_0^- \neq 0$. Следовательно, длина рассеяния $a_1^- = -s_0^-/c_0^-$ не является конечным числом, и поэтому требуется переопределение функции эффективного радиуса. Для этого воспользуемся представлением функции $K(q)$ в виде дроби (78). Так как $c_0^- = 0$, $c_1^- \neq 0$ и $s_0^- \neq 0$, произведение $K_3^\pm \equiv q^{-2} K^\pm(q)$ в пределе $q \to 0$ равно конечной и ненулевой константе. Поэтому в рассматриваемом случае такое произведение считаем функцией эффективного радиуса. Представим ее формулами

$$K_3^-(q) \equiv \lim_{v\to\infty} q^{-2} K^-(v,q) = (\nu!)^2\, q^{2\lambda-1}\, C_\lambda^2(-|\eta|) \operatorname{ctg} \delta_\lambda^-(v,q) - q^{-2}\, h(q) = \\ = -\frac{1}{a_3^-} + \frac{1}{2}\, q^2\, r_3^- + t_3^-(q)\,, \quad (84)$$

где остаточное слагаемое $t_3^-(q)$ при $q \to 0$ убывает как $O(q^4)$, а длина рассеяния $a_3^\pm$ и эффективный радиус $r_3^\pm$ определены следующими предельными соотношениями:

$$a_3^- \equiv -\lim_{v\to 0} \frac{s_0^-(v)}{c_1^-(v)}\,, \quad r_3^- \equiv \lim_{v\to 0} \frac{2}{s_0^-(v)} \left[c_2^-(v) + \frac{s_1^-(v)}{a_3^-(v)} \right].$$

4.3. Асимптотики парциальных фаз и сечений. Выведем и обсудим старшие слагаемые низкоэнергетических асимптотик ($q \to 0$) кулоновской фазы $\delta_\lambda^c(\pm|\eta|)$, ядерно-кулоновской фазы $\delta_\lambda^\pm(q) = \delta_\lambda(\pm|\eta|)$ и трех слагаемых парциального сечения $\sigma_\lambda^{cs}(\pm|\eta|)$, а именно, кулоновского, ядерно-кулоновского и интерференционного сечений $\sigma_\lambda^c(\pm|\eta|)$, $\sigma_\lambda^\pm(q) = \sigma_\lambda(\pm|\eta|)$ и $\sigma_\lambda^{\rm int}(\pm|\eta|)$. Используем определения (7), (8) таких сечений и определения (82)–(84) функций эффективного радиуса. Согласно правилу, принятому в разд. 1, в символе $A(\pm|\eta|)$ или $B^\pm(q)$ берем верхний знак в случае кулоновского отталкивания, а нижний — в случае кулоновского притяжения.

Начнем с обсуждения поведения фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$ и сечения $\sigma_\lambda^c(\eta)$ кулоновского рассеяния в пределе $q \to 0$. В этом пределе согласно формуле (19) модули фаз $\delta_\lambda^c(+|\eta|)$ и $\delta_\lambda^c(-|\eta|)$ неограниченно возрастают как $O(q^{-1}|\ln q|)$, поэтому сечения $\sigma_\lambda^c(+|\eta|)$ и $\sigma_\lambda^c(-|\eta|)$ быстро осциллируют, а их максимальные значения увеличиваются как $O(q^{-1})$.

Теперь рассмотрим те же три случая, что и в предыдущем пункте.

Случай 1. Воспользуемся представлением (82) функции эффективного радиуса $K_1^\pm(q) \equiv K(q)$. Сначала выразим тангенс фазы $\delta_\lambda^\pm(q)$ через коэффициенты $a_1^\pm$ и $r_1^\pm$ и функции C_λ^2 и h. Затем заменим эти функции их асимптотиками (18) и (26) и в итоге докажем, что

$$\operatorname{tg} \delta_\lambda^\pm(q) = -a_1^\pm (\nu!)^2\, q^\nu C_\lambda^2(\pm\eta) \left[1 + O(q^2)\right] \sim -\pi a_1^\pm \left\{ \begin{matrix} \exp(-\pi/q) \\ 1 \end{matrix} \right\}, \quad q \to 0. \quad (85)$$

Следовательно, в пределе $q \to 0$ фаза $\delta_\lambda^+(q)$ быстро убывает, а фаза $\delta_\lambda^-(q)$ сходится к ее значению $\delta_\lambda^-(0) \equiv -\mathrm{arctg}\,(\pi a_1^-)$ в точке $q=0$. Поэтому верны приближения

$$\sigma_\lambda^+(q) \sim \frac{|R|}{q}\varepsilon_\lambda(2\pi a_1^+)^2\,\exp\,(-2\pi/q), \quad \sigma_\lambda^-(q) \sim \frac{|R|}{q}\varepsilon_\lambda\,\frac{(2\pi\,a_1^-)^2}{1+(\pi a_1^-)^2}, \quad q\to 0, \tag{86}$$

Значит, в пределе $q \to 0$ сечение σ_λ^- растет как $O(q^{-1})$, а сечение σ_λ^+ быстро убывает и экспоненциально мало по сравнению с сечением σ_λ^c.

Из формул (19) и (85) следует, что $|\delta_\lambda^c(\pm|\eta|)| \gg |\delta_\lambda^\pm(q)|$, если $q \to 0$. Поэтому

$$\sigma_\lambda^{\mathrm{int}}(\pm|\eta|) \sim 4\,\frac{|R|}{q}\,\varepsilon_\lambda\,\sin\,[2\delta_\lambda^c(\pm|\eta|)]\left\{\begin{array}{c} -\pi\,a_1^\pm\,\exp\,(-\pi/q) \\ \sin\delta_\lambda^-(0)\end{array}\right\}, \quad q\to 0\,.$$

Следовательно, в пределе $q \to 0$ сечение $\sigma_\lambda^{\mathrm{int}}(+|\eta|)$, осциллируя, сходится к нулю, сечение $\sigma_\lambda^{\mathrm{int}}(-|\eta|)$ тоже осциллирует, но амплитуда его осцилляций возрастает как $O(q^{-1})$.

Случай 2. Используя определение (83) функции эффективного радиуса и те же способы, что и в предыдущем случае 1, нетрудно вывести асимптотические $(q\to 0)$ соотношения

$$\begin{aligned} &\delta_\lambda^\pm(q) \sim -\pi a_2^\pm\,q^2\left\{\begin{array}{c}\exp\,(-\pi/q)\\ 1\end{array}\right\}, \\ &\sigma_\lambda^\pm(q) \sim (2\pi a_2^\pm)^2\,|R|\,\varepsilon_\lambda\,q^3\left\{\begin{array}{c}\exp\,(-2\pi/q)\\ 1\end{array}\right\}, \end{aligned} \tag{87}$$

а затем показать, что

$$\sigma_\lambda^{\mathrm{int}}(\pm|\eta|) \sim -4\pi\,a_1^\pm\,|R|\,q\,\varepsilon_\lambda\,\sin\,[2\,\delta_\lambda^c(\pm|\eta|)]\left\{\begin{array}{c}\exp\,(-\pi/q)\\ 1\end{array}\right\}, \quad q\to 0\,.$$

В рассматриваемом случае в отличие от предыдущего фаза δ_λ^- и сечения σ_λ^-, $\sigma_\lambda^{\mathrm{int}}(-|\eta|)$ монотонно сходятся к нулю, если $q \to 0$.

Случай 3. В этом случае функция эффективного радиуса определяется соотношениями (84). Согласно формуле (26) в первом из них $q^{-2}h(q) = -1/6 + O(q^2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\mathrm{tg}\,\delta_\lambda^-(q) \sim \psi(q) \equiv -\frac{6\pi}{q^2}\,\frac{a_3^-}{6+a_3^-(1-3\,q^2\,r_3^-)}\,, \\ &\sigma_\lambda^-(q) \sim 4\,\frac{|R|}{q}\,\varepsilon_\lambda\,\frac{\psi^2(q)}{1+\psi^2(q)}\,, \quad q\to 0\,. \end{aligned} \tag{88}$$

Следовательно, в пределе $q \to 0$ фаза δ_λ^- сходится к числу $-\alpha_3\,\pi/2$, где α_3 — знак коэффициента a_3^- или r_3^-, если $a_3^- \neq -6$ или $a_3^- = -6$. Из-за этой особенности фазы δ_λ^- сечение σ_λ^- содержит квадрат функции $\sin\delta_\lambda^{\mathrm{c}}(-|\eta|)$ и растет как $O(q^{-1})$:

$$\sigma_\lambda^{\mathrm{int}}(-|\eta|) \sim 4\frac{|R|}{q}\,\varepsilon_\lambda\,\sin^2\delta_\lambda^{\mathrm{c}}(-|\eta|)\,, \quad q \to 0\,.$$

4.4. Асимптотики нормировочных множителей и волновых функций. Выявим поведение множителя $N^\pm(q)$ при $q \to 0$. Для этого в определении (30) этого множителя заменим функции C_λ^2 и h их асимптотиками (18) и (26), а функции $c^\pm(v)$ и $s^\pm(v)$ представим в виде разбиений (35) с номером $m = 1$. Затем воспользуемся свойствами предельных ($v \to \infty$) значений $c_0^\pm$ и $s_0^\pm$ компонент $c_0^\pm(v)$ и $s_0^\pm(v)$, а именно тем, что $c_0^+ \neq 0$, а если $c_0^- = 0$, то $s_0^- \neq 0$ и наоборот. Благодаря этим соотношениям в любом из случаев 1–3, рассмотренных в п. 4.2 и 4.3, имеем

$$N^+(q) = \frac{1}{|c_0^\pm|} + O(q^2)\,, \quad N^-(q) = \frac{1}{\sqrt{(c_0^-)^2 + (\pi s_0^-)^2}} + O(q^2)\,, \quad q \to 0\,.$$

Теперь исследуем радиальную волновую функцию u_λ, представленную формулами (33) через функции $f_\lambda^\pm$, $\theta_\lambda^\pm$ и $c^\pm$, $s^\pm$. Как известно [4], в пределе $q \to 0$ при любом $v \geqslant 0$ разложения (34) функций $f_\lambda^\pm$ и $\theta_\lambda^\pm$ сходятся к компонентам $f_{\lambda 0}^\pm$ и $\theta_{\lambda 0}^\pm$, которые согласно формулам (47) пропорциональны функциям Бесселя. В силу теоремы 7 в пределе $q \to 0$ разложения (35) функций $c^\pm(v,q)$ и $s^\pm(v,q)$ вырождаются в компоненты $c_0^\pm(v)$ и $s_0^\pm(v)$. Следовательно, в представлении (33) функции u_λ можно перейти к пределу $q \to 0$ и, используя приведенные выше асимптотики множителя $N^\pm$, получить два предельных соотношения: в случае кулоновского отталкивания

$$u_{\lambda 0}^+(v) \equiv \lim_{q\to 0}\frac{u_\lambda(\rho,+|\eta|}{q^{\lambda+1}\,C_\lambda(+|\eta|)} = \frac{\nu!}{2|c_0^+|}\,\left[\,c_0^+(v)\,I_\nu(v) + 2\,s_0^+(v)\,K_\nu(v)\,\right],$$

а в случае кулоновского притяжения

$$u_{\lambda 0}^-(v) \equiv \lim_{q\to 0}\frac{u_\lambda(\rho,-|\eta|)}{q^{\lambda+1}\,C_\lambda(-|\eta|)} =$$

$$= \frac{\nu!}{2\sqrt{(c_0^-)^2 + (\pi s_0^-)^2}}\,\left[\,c_0^-(v)\,J_\nu(v) - \pi\,s_0^-(v)\,Y_\nu(v)\,\right].$$

Сформулируем два следствия этих предельных соотношений. Во-первых, произведение функций $q^{\lambda+1}C_\lambda(\pm|\eta|)$ и $u_{\lambda 0}^\pm(v)$ является старшим слагаемым низкоэнергетической асимптотики волновой функции $u_\lambda(\rho,\pm|\eta|)$. Во-вторых, функция $u^{\pm}_{\lambda 0}(v)$ является единственным решением исходной краевой задачи Шредингера (4)–(6) в случае нулевой полной энергии E.

4.5. Условия существования длины рассеяния и эффективного радиуса. Выясним, как потенциал $V(v)$ должен убывать в пределе $v \to \infty$, чтобы во всех случаях 1–3 длина рассеяния и эффективный радиус оказались конечными константами. Для этого используем соотношения (3), содержащие параметр β, и в каждом из случаев 1–3 найдем соответствующее число, которое этот параметр должен превышать.

По определению, данному в разд. 1, короткодействующий потенциал V удовлетворяет условиям (3) при любом сколь угодно большом значении параметра β. Поэтому для такого потенциала при любом сколь угодно большом номере m леммы 1–3 и теоремы 1–7 остаются в силе. Следовательно, разбиения (72) существуют в пределе $m \to \infty$ и вырождаются в этом пределе в бесконечные ряды, а все компоненты $c^{\pm}_n(v)$ и $s^{\pm}_n(v)$, $n = 0, 1, \ldots$, этих рядов в точке $v = \infty$ принимают конечные значения $c^{\pm}_n$ и $s^{\pm}_n$. Как показано в п. 4.2, длины рассеяния $a^{\pm}_i$, $i = 1, 2, 3$, и эффективные радиусы $r^{\pm}_i$, $i = 1, 2, 3$, выражаются через предельные значения $c^{\pm}_n$ и $s^{\pm}_n$, $n = 0, 1, 2$. Следовательно, в случае короткодействующего потенциала V все такие длины рассеяния и эффективные радиусы существуют и являются конечными константами. Поэтому в этом же случае верны все асимптотические соотношения, выведенные в п. 4.2–4.4.

Считая условия (2) выполненными, рассмотрим те же три случая, что и в п. 4.2.

Случай 1. Согласно формулам (81) длина рассеяния $a^{\pm}_1$ равна дроби $-s^{\pm}_0/c^{\pm}_0$, в которой $c^{\pm}_0$ и $s^{\pm}_0$ — значения функций $c^{\pm}_0(v)$ и $s^{\pm}_0(v)$ в точке $v = \infty$. Как показано в теоремах 3 и 6, такие значения существуют и являются конечными, если выполнены условия (9). Согласно последнему из них $V(v) = o(v^{-4})$, если $v \to \infty$, а $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Теперь заметим, что коэффициент $-1/a^{\pm}_1$ будет старшим слагаемым низкоэнергетической асимптотики (82) функции эффективного радиуса, если следующее слагаемое такой асимптотики будет сходиться к нулю как $O(q^2)$. Для такой сходимости согласно теореме 7 должны существовать разбиения (72) с номером $m = 1$. Для этого достаточным является условие (3), в котором $2\beta > 3(m + 1)$, а $m = 1$. Следовательно, длина рассеяния $a^{\pm}_1$ существует, если в условии (3) параметр β больше трех. Приближения (85) и (86) фазы $\delta^{\pm}_{\lambda}$ и сечения $\sigma^{\pm}_{\lambda}$ содержат единственный параметр — длину рассеяния $a^{\pm}_1$. Поэтому эти приближения и все выведенные в п. 4.4 асимптотики справедливы при том же условии (3), $\beta > 3$. Если кулоновский потенциал $2\eta/\rho$ является притягивающим ($\alpha = -1$), то обсуждаемому условию (3), $\beta > 3$, удовлетворяет довольно медленно убывающий потенциал V, например, потенциал с асимптотикой $V = O(v^{-2p})$, в которой $v \to \infty$, а $p > \beta > 3$.

Теперь выявим условия, достаточные для существования эффективного радиуса $r_1^{\pm}$. Согласно формулам (81) этот параметр представляется через значения $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$, $n \leqslant m = 1$, функций $c_n^{\pm}(v)$ и $s_n^{\pm}(v)$, $n \leqslant m = 1$, в точке $v = \infty$. Как показано в теоремах 3 и 6, такие значения существуют и являются конечными при условиях (3), в которых $\beta > 3(m+1)$, а $m = 1$. Слагаемое $q^2 r_1^{\pm}$ будет слагаемым низкоэнергетической асимптотики (82) функции эффективного радиуса, если следующее слагаемое такой асимптотики будет сходиться к нулю как $O(q^4)$. Согласно теореме 7 для этого должны существовать разбиения (72) с номером $m = 2$. Такие разбиения, а значит, и эффективный радиус $r_1^{\pm}$, существуют при условиях (3), в которых $2\beta > 3(m+1)$, а $m = 2$. Эти условия означают, что $\beta > 9/2$, и являются достаточными.

Случаи 2 и 3. Используя определения (83) и (84) функций эффективного радиуса и те же способы, что и в рассмотренном выше случае 1, нетрудно прийти к следующим выводам. Условия (3), в которых $\beta > 3(m+1)$, а $m = 2$, являются достаточными для существования длин рассеяния $a_2^{\pm}$ и $a_3^{\pm}$ и приближений (87) фазы $\delta_\lambda^{\pm}$ и сечения $\sigma_\lambda^{\pm}$. При условиях (3), в которых $\beta > 3(m+1)$, а $m = 3$, заведомо существуют эффективные радиусы $r_2^{\pm}$ и $r_3^{\pm}$, а фаза δ_λ^{-} и сечение σ_λ^{-} имеют асимптотики (88).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые дано расширение теории двумерного потенциального рассеяния на случай суперпозиции кулоновского и центрального короткодействующего потенциалов. В разд. 2 и 3 предложен и обоснован асимптотический в пределе низких энергий метод. В этом методе ключевой является рекуррентная по номеру $n = 0, 1, \dots$ и энергонезависимая цепочка линейных задач Коши (36), (37) для компонент $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$. Доказано, что при любом значении квантового числа λ эта цепочка однозначно разрешима в классе функций, непрерывных на полуоси $v \geqslant 0$. В разд. 4 предложенный метод применен для вывода и анализа низкоэнергетических приближений функции эффективного радиуса, радиальных волновых функций, парциальных фаз и сечений двумерного ядерно-кулоновского рассеяния. Такие приближения получены впервые и в качестве неизвестных функций содержат лишь компоненты $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$, $n \leqslant 2$, вычисление которых не может вызвать каких-либо принципиальных затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bollé D., Gesztesy F.* // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 1279.
2. *Friedrich H.* Scattering Theory // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 2013, V. 872.

3. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
4. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2016. Т. 186. С. 123.
5. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2016. Т. 186. С. 239.
6. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2016. Т. 188. С. 49.
7. *Пупышев В. В.* Метод амплитудных функций в теории двумерного рассеяния. Препринт ОИЯИ Р4-2016-50. Дубна, 2016.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. М.: Наука, 1976.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены: Пер. с англ. М.: Наука, 1974.
10. *Martin A.* // Nuovo Cim. 1962. V. 33. P. 641.
11. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Получено 1 сентября 2016 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 18.10.2016.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,69. Уч.-изд. л. 3,32. Тираж 245 экз. Заказ № 58924.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/