Р11-2017-67

М. Б. Юлдашева, О. И. Юлдашев

ГРАНИЧНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ТРЕХМЕРНЫМ ГАРМОНИЧЕСКИМ БАЗИСОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИВЕРГЕНЦИЯ–РОТОР

Направлено в «Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling»

Юлдашева М. Б., Юлдашев О. И. P11-2017-67
Граничный метод наименьших квадратов с трехмерным гармоническим базисом высокого порядка для решения линейных систем дивергенция–ротор

Для трехмерного случая предлагается обоснование граничного метода наименьших квадратов с гармоническим базисом высокого порядка аппроксимации, ранее сформулированного авторами. Для линейных систем дивергенция–ротор с условиями Дирихле, а также смешанными краевыми условиями получены обобщенные формулировки в пространствах кусочно-полиномиальных градиентов гармонических функций. Исследованы свойства билинейных форм и аппроксимационные свойства базиса. Доказана h-сходимость приближенных решений. В отличие от основной формулировки метода Галеркина с разрывными базисными функциями в этом методе не требуется задания штрафной весовой функции.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2017

Yuldasheva M. B., Yuldashev O. I. P11-2017-67
Boundary Least-Squares Method with 3D Harmonic Basis of a High Order for Solving Linear Div-Curl Systems

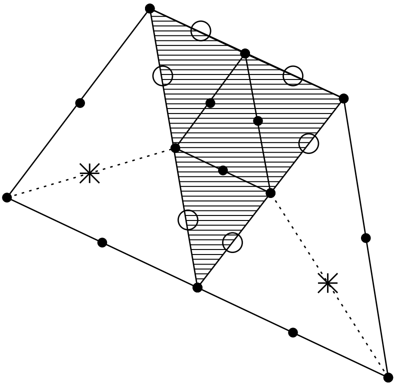
Justification of a boundary least squares method with harmonic basis of a high order, which was formulated earlier by the authors, is given for 3D. For the linear div-curl systems with the Dirichlet conditions as well as with the mixed boundary conditions, weak formulations in spaces of piecewise-polynomial gradients of harmonic functions are obtained. Properties of bilinear forms and approximating properties of the basis are investigated. The h-convergence of approximate solutions is proved. In contrast to the primal formulation of the discontinuous Galerkin method, in this method the choice of a penalty weight function is not required.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, при решении сложных задач методом конечных элементов с помощью адаптивных алгоритмов необходимость дробления ячеек влечет за собой возникновение «висящих» узлов (hanging nodes) и «висящих» ребер (hanging edges). Использование обычного C^0-непрерывного базиса [1] диктует генерацию дополнительных элементов, соседних с раздробленной ячейкой (см. рисунок). При этом необходимо согласование порядков аппроксимирующих многочленов в близрасположенных элементах [2]. Одним из альтернативных подходов, позволяющих проводить оптимальные дробления ячеек и использовать на них оптимальные порядки аппроксимирующих многочленов, наряду с разрывными методами Галеркина [3, 4] является метод наименьших квадратов с разрывными базисными функциями [5, 6]. Особый интерес представляет направление развития этих методов, связанное с применением L-гармонических базисов. В связи с этим отметим использование гармонических базисов в публикациях для двумерного [7, 8] и трехмерного [10] случаев, а также в инженерной литературе [9].



Дробление треугольного элемента степени 2 на 4 подобных, возникновение «висящих» узлов ($\circ$), дополнительных элементов в соседних ячейках с дополнительными узлами ($*$)

В данной работе представлено обоснование подхода, предложенного авторами в [11]. В этом подходе не требуется объемного интегрирования при вычислении элементных матриц, а также не требуется задания штрафной весовой функции; при минимизации функционала используются обычные L^2-нормы на границах элементов, а для получения векторного поля нет необходимости в дополнительных вычислительных затратах. В разд. 1 сформулированы две рассматриваемые задачи, а также введены необходимые обозначения, в разд. 2

исследованы билинейные формы, в разд. 3 рассмотрены аппроксимационные свойства базиса, в разд. 4 доказана h-сходимость метода. В приложении доказана вспомогательная лемма 5.1.

1. ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В ограниченной области $\Omega \in \mathbf{R^3}$, представляющей собой выпуклый многогранник с липшицевой границей, рассмотрим две краевые задачи относительно вектор-функции $\mathbf{u}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = g, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{G}, \quad x \in \Omega; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad x \in \partial\Omega \tag{1}$$

и

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \mathbf{u} = g, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{G}, \quad x \in \Omega; \\ \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}^*, \quad x \in \Gamma_D; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^*, \quad x \in \Gamma_N. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $g \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{G} \in L^2(\Omega)$ заданы, $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$, $\mathbf{n}$ — внешняя к Ω нормаль, $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_D \neq \emptyset$. Будем предполагать, что правые части и краевые условия задач (1), (2) удовлетворяют необходимым условиям однозначной разрешимости [5, 12].

Сформулируем задачи (1), (2) в обобщенном виде в пространствах кусочно-полиномиальных вектор-функций, следуя граничному методу наименьших квадратов. Сначала введем некоторые обозначения.

Пусть T_h — регулярное разбиение [1] области Ω, а Γ_{int} — граница между элементами:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N(T_h)} \overline{\Omega}_k, \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset, \quad \Gamma_{\text{int}} = \bigcup_{\Omega_k, \Omega_l \subset T_h} \Gamma_{kl}, \quad \Gamma_{kl} = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_l, \quad k \neq l.$$

Для каждого элемента $\Omega_k \subset T_h$ справедливо неравенство $(h_k/\rho_k) < C_{h\rho}$, где h_k — диаметр Ω_k, а ρ_k — радиус вписанного шара, $C_{h\rho}$ — положительная константа.

Через $[\![\cdot]\!]$ обозначим оператор скачка на границе между двумя соседними элементами и на границе области:

$$\begin{gathered} [\![\mathbf{u}]\!]|_{\Gamma_{kl} \subset \Gamma_{\text{int}}} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega_k} - \mathbf{u}|_{\partial\Omega_l}, \quad k < l, \\ [\![\mathbf{u}]\!]|_{\Gamma_k \subset \Gamma_D} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega_k}, \end{gathered}$$

где $\mathbf{u}|_{\partial\Omega_k}$ и $\mathbf{u}|_{\partial\Omega_l}$ — следы вектор-функций $\mathbf{u}|_{\Omega_k}$, $\mathbf{u}|_{\Omega_l}$. Нормалью на общей границе элементов Γ_{kl} будем считать внешнюю нормаль к Ω_k, если $k < l$.

На гладких частях границы определим взаимно ортогональные единичные векторы касательной, бинормали и нормали таким образом, чтобы они составляли локальную правую декартову систему координат. Обозначим их соответственно $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$. Определим векторную функцию $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{s}u_s + \mathbf{t}u_t$ с компонентами u_s и u_t или, иначе, $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$. Соответственно $u_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$. Для скалярных произведений, норм и полунорм непрерывных пространств используем общепринятые обозначения [1], при этом для скалярных и векторных пространств используем одинаковое написание.

При дискретизации задач (1), (2) будем предполагать, что в каждом элементе $\Omega_k \in T_h$ приближенное решение представимо в виде

$$\mathbf{u}_h = \nabla\varphi + \mathbf{w}, \quad \varphi \in Z_0^{p_k}(\Omega_k) = \left\{ \psi \in P_{p_k}, \quad \Delta\psi = 0, \quad \int\limits_{\partial\Omega_k} \psi dS = 0 \right\},$$

где P_{p_k} — множество многочленов степени $\leqslant p_k$, $p_k \geqslant 2$, а $\mathbf{w}$ — частное решение:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = g, \quad \nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{G}, \quad x \in \Omega_k.$$

Таким образом, имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h = g, \quad \nabla \times \mathbf{u}_h = \mathbf{G}, \quad x \in \Omega_k \quad \Omega_k \subset T_h.$$

Для нахождения $\mathbf{u}_h$ во всей области Ω в задаче (1) минимизируем следующий функционал:

$$J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}^*, T_h) = \sum_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega) \subset T_h} |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}^*|^2_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega)} + \\ + \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{\text{int}}} (|[\![\mathbf{u}_{h,\tau}]\!]|^2_{\Gamma_{kl}} + |[\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_h]\!]|^2_{\Gamma_{kl}}). \quad (3)$$

Дифференцируя по φ, получим обобщенное уравнение с билинейной формой и функционалом правой части

$$B_h^{(1)}(\nabla\varphi, \nabla\psi) = F_h^{(1)}(\nabla\psi), \quad (4)$$

где

$$B_h^{(1)}(\nabla\varphi, \nabla\psi) = \sum_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega) \subset T_h} (\nabla\varphi, \nabla\psi)_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega)} + \\ + \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{\text{int}}} (([\![\nabla_\tau\varphi]\!], [\![\nabla_\tau\psi]\!])_{\Gamma_{kl}} + ([\![\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi]\!], [\![\mathbf{n} \cdot \nabla\psi]\!])_{\Gamma_{kl}}), \quad (5)$$

$$F_h^{(1)}(\nabla\psi) = - \sum_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega) \subset T_h} (\mathbf{w} - \mathbf{u}^*, \nabla\psi)_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega)} - \\ - \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{\text{int}}} (([\![\mathbf{w}_\tau]\!], [\![\nabla_\tau\psi]\!])_{\Gamma_{kl}} + ([\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}]\!], [\![\mathbf{n} \cdot \nabla\psi]\!])_{\Gamma_{kl}}).$$

Здесь $\nabla_\tau(\cdot) = \mathbf{s}\partial(\cdot)/\partial s + \mathbf{t}\partial(\cdot)/\partial t$, $\nabla\varphi, \nabla\psi \in \mathbf{V}^p(T_h)$, где

$$\mathbf{V}^p(T_h) = \{\mathbf{v} = \nabla\varphi : \varphi \in L^2(\Omega), \varphi|_{\Omega_k} \in Z_0^{p_k}(\Omega_k), \quad \forall\Omega_k \in T_h\}.$$

Таким образом, задаче (1) ставится в соответствие задача (4), поскольку точное решение (1) удовлетворяет (4).

Рассмотрим функционал

$$J_2(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}^*, T_h) = \sum_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D) \subset T_h} |\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}^*)|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D)} + \\ + \sum_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N) \subset T_h} |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}^*)|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N)} + \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{\text{int}}} (|[\![\mathbf{u}_{h,\tau}]\!]|^2_{\Gamma_{kl}} + |[\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_h]\!]|^2_{\Gamma_{kl}}), \tag{6}$$

минимизируя который, получим обобщенное уравнение с соответствующей билинейной формой и функционалом правой части

$$B_h^{(2)}(\nabla\varphi, \nabla\psi) = F_h^{(2)}(\nabla\psi), \tag{7}$$

где

$$B_h^{(2)}(\nabla\varphi, \nabla\psi) = \sum_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D) \subset T_h} (\nabla_\tau\varphi, \nabla_\tau\psi)_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D)} + \\ + \sum_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N) \subset T_h} (\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi, \mathbf{n} \cdot \nabla\psi)_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N)} + \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{\text{int}}} (([\![\nabla_\tau\varphi]\!], [\![\nabla_\tau\psi]\!])_{\Gamma_{kl}} + \\ + ([\![\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi]\!], [\![\mathbf{n} \cdot \nabla\psi]\!])_{\Gamma_{kl}}), \tag{8}$$

$$F_h^{(2)}(\nabla\psi) = -\sum_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D) \subset T_h} (\mathbf{n} \times (\mathbf{w} - \mathbf{u}^*), \nabla_\tau\psi)_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D)} - \\ - \sum_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N) \subset T_h} (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{u}^*), \mathbf{n} \cdot \nabla\psi)_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N)} - \sum_{\Gamma_{kl} \in \Gamma_{\text{int}}} (([\![\mathbf{w}_\tau]\!], [\![\nabla_\tau\psi]\!])_{\Gamma_{kl}} + \\ + ([\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}]\!], [\![\mathbf{n} \cdot \nabla\psi]\!])_{\Gamma_{kl}}).$$

Здесь $\nabla\varphi, \nabla\psi \in \mathbf{V}_0^p(T_h)$, где

$$\mathbf{V}_0^p(T_h) = \left\{\mathbf{u} = \nabla\varphi : \varphi \in L^2(\Omega), \varphi|_{\Omega_k} \in Z_0^{p_k}(\Omega_k), \quad \forall\Omega_k \subset T_h, \right. \\ \left. \int_{\Gamma_0} \varphi dS = 0, \quad \Gamma_0 \subset \Gamma_D \right\}.$$

Таким образом, задаче (2) ставится в соответствие задача (7), поскольку точное решение (2) удовлетворяет (7).

2. СВОЙСТВА БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Для исследования билинейной формы $B_h^{(1)}$ рассмотрим функционал (3) при $\mathbf{u} = \nabla\varphi \in V^p(T_h)$, $\mathbf{u}^* = 0$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Функционал $J_1(\mathbf{u}, 0, T_h)$ является нормой в $\mathbf{V}^p(T_h)$. Для $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^p(T_h)$ справедливы следующие оценки:*

$$C_1^* \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \sum_{\Omega_k \subset T_h} \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega_k)} \leqslant C_2^* J_1(\mathbf{u}, 0, T_h), \tag{9}$$

$$C_3^* \|\mathbf{u}\|^2_{W_2^{p_k-1}(\Omega_k)} \leqslant J_1(\mathbf{u}, 0, T_h), \quad \forall \Omega_k \subset T_h, \tag{10}$$

$$C_4^* \|\mathbf{u}\|^2_{C^{p_k-1}(\Omega_k)} \leqslant J_1(\mathbf{u}, 0, T_h), \quad \forall \Omega_k \subset T_h, \tag{11}$$

где C_i^* — положительная константа, $i = 1, 2, 3, 4$.

Доказательство. Очевидно, что если $\mathbf{u} = 0$, то $J_1 = 0$. Предположим, что $J_1 = 0$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^p(T_h)$. Равенство нулю интегралов в (3) означает, что $\mathbf{u}$ — непрерывная вектор-функция в Ω. С учетом предположения имеем $|\nabla\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, т. е. $\varphi = \mathrm{const}$ на $\partial\Omega$.

Используем формулу

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \int_y^x \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\,dt, \tag{12}$$

где $\mathbf{u} = \nabla\varphi$; $\mathbf{t}\cdot\nabla\varphi$ — производная по направлению $\mathbf{t}$; $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$. С помощью этой формулы получаем значения φ во всех граничных элементах и далее во всей области Ω.

Таким образом, $\varphi \in C(\Omega) \cap C^{p_k}(\Omega_k)$, $\forall \Omega_k \subset T_h$. Для $\Omega_k \subset T_h$ воспользуемся формулой Грина

$$0 = -\int_{\Omega_k} \varphi\nabla\cdot\mathbf{u}\,d\Omega = \int_{\Omega_k} |\mathbf{u}|^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega_k} \varphi u_n\,dS.$$

С учетом правила определения знаков нормалей просуммируем это уравнение по всем элементам:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} \varphi u_n\,dS = 0.$$

Так как по предположению $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, то $\mathbf{u} = 0$ во всей области Ω. Используя неравенство Пуанкаре и учитывая определение пространства $\mathbf{V}^p(T_h)$, для каждого элемента получим, что и $\varphi = 0$ в Ω.

Для доказательства неравенств (9)–(11) используем тождество, которое является следствием свойства ньютонова потенциала для векторных функций:

$$\mathbf{u}(x) = \int\limits_{\Omega} \mathbf{u}(y) U^*(x,y) d\Omega_y, \quad U^*(x,y) = 1/(4\pi|x-y|),$$

где Ω — выпуклая область с липшицевой границей. Известно [13], что $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)$ и $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbf{R^3} \backslash \bar{\Omega})$, если $\mathbf{u} \in C^1 \cap C(\bar{\Omega})$. При $x \in \Omega$ справедливо следующее интегральное тождество:

$$\mathbf{u}(x) = -\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}). \tag{13}$$

Если $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ в Ω, то формула становится проще. Используя правила действий с оператором ∇, с учетом того, что $-\nabla_x U^*(x,y) = \nabla_y U^*(x,y) \equiv \mathbf{V}^*(x,y)$, получим

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times \left(\int\limits_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) U^*(x,y) d\Omega_y - \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) U^*(x,y) dS_y \right) =$$
$$= -\int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \mathbf{V}^*(x,y) dS_y;$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \times \left(\int\limits_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) U^*(x,y) d\Omega_y - \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) U^*(x,y) dS_y \right) =$$
$$= \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{V}^*(x,y) dS_y.$$

Тогда интегральное тождество (13) для $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^p(T_h)$ и $\Omega_k \subset T_h$ приобретает следующий вид:

$$\delta(x,\Omega_k)\mathbf{u}(x) = -\int\limits_{\partial\Omega_k} ((\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{V}^*(x,y) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{V}^*(x,y)) dS_y, \quad x \in \Omega_k,$$

где $\delta(x,\Omega_k) = 1$, если $x \in \Omega_k$, и $\delta(x,\Omega_k) = 0$, если $x \notin \bar{\Omega}_k$.

Просуммируем это уравнение по всем элементам из T_h при фиксированном $x \in \Omega_k$ с учетом знаков нормалей:

$$\mathbf{u}(x) = -\int\limits_{\Gamma_{\rm int}} ([\![\mathbf{n} \times \mathbf{u}]\!] \times \mathbf{V}^*(x,y) + [\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]\!] \mathbf{V}^*(x,y)) dS_y -$$
$$- \int\limits_{\partial\Omega} ((\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{V}^*(x,y) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{V}^*(x,y)) dS_y, \quad x \in \Omega_k.$$

Продифференцируем эту формулу при $|\alpha| = 1, 2, \ldots, p_k - 1$:

$$D_x^\alpha \mathbf{u}(x) = -\int\limits_{\Gamma_{\rm int}} ([\![\mathbf{n}\times\mathbf{u}]\!]\times(D_x^\alpha \mathbf{V}^*(x,y)) + [\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]\!](D_x^\alpha \mathbf{V}^*(x,y)))dS_y -$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega}((\mathbf{n}\times\mathbf{u})\times(D_x^\alpha \mathbf{V}^*(x,y)) + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})(D_x^\alpha \mathbf{V}^*(x,y)))dS_y, \quad x\in\Omega_k.$$

Здесь $D_x^\alpha(\cdot) = \partial^{|\alpha|}(\cdot)/(\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3})$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

Оценим правые части полученных формул, предполагая, что $|\alpha| = 0, \ldots, p_k - 1$:

$$|D_x^\alpha \mathbf{u}(x)| \leqslant \int\limits_{\Gamma_{\rm int}} (|[\![\mathbf{n}\times\mathbf{u}]\!] + |[\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]\!]|)\cdot|D_x^\alpha \mathbf{V}^*(x,y)|dS_y +$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}(|\mathbf{n}\times\mathbf{u}| + |\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|)\cdot|D_x^\alpha \mathbf{V}^*(x,y)|dS_y, \quad x\in\Omega_k.$$

Используя неравенства Коши–Буняковского сначала для интегралов, а затем для сумм, получим

$$|D_x^\alpha \mathbf{u}(x)| \leqslant |D_x^\alpha \mathbf{V}^*|_{\Gamma_{\rm int}}\cdot(|[\![\mathbf{n}\times\mathbf{u}]\!]_{\Gamma_{\rm int}} + |[\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]\!]|_{\Gamma_{\rm int}}) +$$
$$+\|D_x^\alpha \mathbf{V}^*\|_{L^2(\partial\Omega)}\cdot(|\mathbf{n}\times\mathbf{u}|_{\partial\Omega} + |\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_{\partial\Omega}) \leqslant$$
$$\leqslant (C_k^\alpha)^{1/2}\cdot(|[\![\mathbf{n}\times\mathbf{u}]\!]^2_{\Gamma_{\rm int}} + |[\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]\!]|^2_{\Gamma_{\rm int}} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\partial\Omega)})^{1/2}, \quad x\in\Omega_k.$$

Следовательно,

$$|D_x^\alpha \mathbf{u}(x)|^2 \leqslant C_k^\alpha(|[\![\mathbf{n}\times\mathbf{u}]\!]^2_{\Gamma_{\rm int}} + |[\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]\!]|^2_{\Gamma_{\rm int}} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}), \quad x\in\Omega_k.$$

Суммируя это неравенство по $|\alpha| = 1, 2, \ldots, p_k - 1$, получим (11) с $C_4^* = \Big(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant p_k-1} C_k^\alpha\Big)^{-1}$. Заметим, что x — любая точка области Ω_k.

Неравенство (9) для $\mathbf{u}$ выводится с помощью интегрирования по всем $\Omega_k\subset T_h$ при $|\alpha| = 0$. При этом $C_2^* = \sum\limits_{\Omega_k\subset T_h}|\Omega_k|\cdot C_k^0$.

Для доказательства неравенства (10) выполним интегрирование по $\Omega_k \subset T_h$ и суммирование по $|\alpha| = 0, 1, \ldots, p_k - 1$:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant p_k-1}\|D_x^\alpha \mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega_k)} \leqslant (C_3^*)^{-1}J_1(\mathbf{u}, 0, T_h), \quad \forall\Omega_k\subset T_h.$$

Здесь $(C_3^*)^{-1} = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant p_k-1}|\Omega_k|C_k^\alpha$.

Неравенство (9) для φ является результатом суммирования неравенства Пуанкаре по всем $\Omega_k \subset T_h$ с учетом определения $\mathbf{V}^p(T_h)$:

$$\sum_{\Omega_k \subset T_h} \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega_k)} \leqslant (C_1^*)^{-1} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)},$$

где $(C_1^*)^{-1} = \sum\limits_{\Omega_k \subset T_h} C_k$, а C_k — константа из неравенства Пуанкаре для элемента Ω_k. Лемма доказана.

Для исследования билинейной формы $B_h^{(2)}$ рассмотрим функционал (6) при $\mathbf{u} = \nabla\varphi \in V_0^P(T_h)$, и $\mathbf{u}^* = 0$.

Введем следующие обозначения: $T_h^{(1)} = \{\Omega_k \in T_h : (\partial\Omega_k \cap \partial\Omega) \subset \Gamma_D\}$, $T_h^{(2)} = \{\Omega_k \in T_h : (\partial\Omega_k \cap \partial\Omega) \subset \Gamma_N\}$, $T_h^{(3)} = \{\Omega_k \subset T_h : (\partial\Omega_k \cap \partial\Omega) \subset (\Gamma_D \cup \Gamma_N)\}$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.2. *Функционал $J_2(\mathbf{u}, 0, T_h)$ является нормой в $\mathbf{V}_0^p(T_h)$. Для $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0^p(T_h)$ справедливы оценки*

$$C_1' \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \sum_{\Omega_k \subset T_h} \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega_k)} \leqslant C_2' J_2(\mathbf{u}, 0, T_h), \tag{14}$$

$$C_3' \|\mathbf{u}\|^2_{W_2^{p_k-1}(\Omega_k)} \leqslant J_2(\mathbf{u}, 0, T_h), \quad \forall\Omega_k \subset T_h, \tag{15}$$

$$C_4' \|\mathbf{u}\|^2_{C^{p_k-1}(\Omega_k)} \leqslant J_2(\mathbf{u}, 0, T_h), \quad \forall\Omega_k \subset T_h, \tag{16}$$

где C_i' — положительные константы, не зависящие от φ и u, $i = 1, 2, 3, 4$.

Доказательство. Пусть $J_2 = 0$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0^p(T_h)$. Аналогично доказательству леммы 2.1 получаем, что $\mathbf{u}$ — непрерывная вектор-функция в Ω, $|\mathbf{n} \times \nabla\varphi|_{\Gamma_D} = 0$. Отсюда по формуле

$$\varphi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dt, \quad x, x_0 \in \Gamma_D, \quad \varphi(x_0) = 0,$$

имеем $\varphi|_{\Gamma_D} = 0$ и $\varphi|_{\Omega_k} \subset C(\Omega) \cap C^{p_k}(\Omega_k)$, $\forall\Omega_k \subset P_h$. При суммировании формулы Грина по всем $\Omega_k \subset P_h$ с учетом знаков нормалей получим

$$\int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\Omega - \int\limits_{\Gamma_D} \varphi u_n dS - \int\limits_{\Gamma_N} \varphi u_n dS = 0.$$

По предположению, $u_n|_{\Gamma_N} = 0$, поэтому $\mathbf{u} = 0$ в Ω.

Кусочная гладкость многочленов из $V_0^p(T_h)$ позволяет доказать такие же оценки, как (9)–(11) в лемме 2.1. Поэтому для доказательства (14)–(16) достаточно оценить сверху функционал $J_1(\mathbf{u}, 0, T_h)$ с помощью функционала $J_2(\mathbf{u}, 0, T_h)$, $\mathbf{u} \in V_0^p(T_h)$.

Рассмотрим три вспомогательные задачи в приграничных элементах Ω_i, Ω_j и Ω_l, которые характеризуются тем, что $\Omega_i \subset T_h^{(1)}$, $\Omega_j \subset T_h^{(2)}$ и $\Omega_l \subset T_h^{(3)}$.

Пусть $\mathbf{u} \in V_0^p(T_h)$. Первая задача имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_1 = 0, \quad x \in \Omega_i; \quad \mathbf{n}\times\mathbf{u}_1 = \mathbf{n}\times\mathbf{u}, \quad x \in \partial\Omega_i \cap \Gamma_D,$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{u}_1 = [\![\mathbf{n} \times \mathbf{u}]\!], \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_1 = [\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]\!], \quad x \in \partial\Omega_i \cap \Gamma_{\mathrm{int}}, \tag{17}$$

где $\Omega_i \subset T_h^{(1)}$.

В соответствии с леммой 3.2 имеем оценку

$$|\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_1|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_D)} \leqslant C_1^{(i)}(|\mathbf{n}\times\mathbf{u}|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_D)} + |[\![\mathbf{n}\times\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_{\mathrm{int}})} + |[\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_{\mathrm{int}})}).$$

Рассмотрим вторую задачу:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_2 = 0, \quad x \in \Omega_j; \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}, \quad x \in \partial\Omega_j \cap \Gamma_N,$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{u}_2 = [\![\mathbf{n} \times \mathbf{u}]\!], \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_2 = [\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]\!], \quad x \in \partial\Omega_j \cap \Gamma_{\mathrm{int}}, \tag{18}$$

где $\Omega_j \subset T_h^{(2)}$.

С учетом леммы 3.2 получаем оценку

$$|\mathbf{n}\times\mathbf{u}_2|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)} \leqslant C_2^{(j)}(|\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)} + |[\![\mathbf{n}\times\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_{\mathrm{int}})} + |[\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_{\mathrm{int}})}).$$

Когда $\Omega_l \subset T_h^{(3)}$, для третьей задачи

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_3 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_3 = 0, \quad x \in \Omega_l; \quad \mathbf{n}\times\mathbf{u}_3 = \mathbf{n}\times\mathbf{u}, \quad x \in \partial\Omega_l \cap \Gamma_D,$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}, \quad x \in \partial\Omega_l \cap \Gamma_N,$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{u}_3 = [\![\mathbf{n} \times \mathbf{u}]\!], \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_3 = [\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]\!], \quad x \in \partial\Omega_l \cap \Gamma_{\mathrm{int}}, \tag{19}$$

имеем

$$|\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_3|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_D)} + |\mathbf{n} \times \mathbf{u}_3|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_N)} \leqslant C_3^{(l)}(|\mathbf{n} \times \mathbf{u}|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_D)} +$$
$$+ |\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_N)} + |[\![\mathbf{n} \times \mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_{\mathrm{int}})} + |[\![\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_{\mathrm{int}})}).$$

Учитывая, что вспомогательные задачи решаются точно, т. е. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $x \in \Omega_i$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$, $x \in \Omega_j$ и $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}$, $x \in \Omega_l$, и суммируя эти неравенства по приграничным элементам, получим

$$\sum_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_D)\subset T_h^{(1)}} |\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|^2_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_D)} + \sum_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_N)\subset T_h^{(2)}} |\mathbf{n}\times\mathbf{u}|^2_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_N)} \leqslant$$

$$\leqslant C_4\Big(\sum_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_D)\subset T_h^{(1)}} |\mathbf{n}\times\mathbf{u}|^2_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_D)} + \sum_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_N)\subset T_h^{(2)}} |\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|^2_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_N)} +$$

$$+ \sum_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_{\rm int})\subset T_h^{(3)}} |[\![\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_{\rm int})}\Big).$$

Отсюда $J_1(\mathbf{u},0,T_h) \leqslant C_4\cdot J_2(\mathbf{u},0,T_h)$ и, следовательно, справедливы неравенства (14)–(16).

Учитывая свойства функционалов $J_1(\mathbf{u},0,T_h)$ и $J_2(\mathbf{u},0,T_h)$, введем следующие нормы:

$$\|\mathbf{u}\|^2_{1,V} = J_1(\mathbf{u},0,T_h), \quad \|\mathbf{v}\|^2_{2,V} = J_2(\mathbf{v},0,T_h),$$

для $\mathbf{u}\in\mathbf{V}^p(T_h)$ и $\mathbf{v}\in\mathbf{V}^p_0(T_h)$.

Для того чтобы проанализировать свойства билинейных форм (5) и (8), применим тот же подход, который используется для разрывных методов Галеркина в [2, 3]. Используем обозначения $\mathbf{V}_h^{(1)} = \mathbf{V}^p(T_h)$, $\mathbf{V}_h^{(2)} = \mathbf{V}^p_0(T_h)$.

Теорема 2.1. *Билинейные формы* $B_h^{(n)} : \mathbf{V}_h^{(n)} \times \mathbf{V}_h^{(n)} \to \mathbf{R}$, $n = 1, 2$, *непрерывны и коэрцитивны. Они обладают свойством галеркинской ортогональности, и выполняется следующее неравенство:*

$$\|\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}\|_{n,V} \leqslant \inf_{\mathbf{v}_h^{(n)}\in\mathbf{V}_h^{(n)}} \|\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{v}_h^{(n)}\|_{n,V}, \quad n = 1, 2, \tag{20}$$

где $\mathbf{u}_*^{(n)}$, $n = 1, 2$, *— точные решения (4), (7), а* $\mathbf{u}_h^{(n)} \in \mathbf{V}_h^{(n)}$, $n = 1, 2$, *— соответствующие приближенные решения этих уравнений.*

Доказательство. Сначала докажем непрерывность билинейных форм, т. е. следующее неравенство:

$$|B_h^{(n)}(\mathbf{u}^{(n)},\mathbf{v}^{(n)})| \leqslant C\|\mathbf{u}^{(n)}\|_{n,V}\|\mathbf{v}^{(n)}\|_{n,V}, \quad C = \mathrm{const} > 0,$$
$$\forall \mathbf{u}^{(n)},\mathbf{v}^{(n)} \in \mathbf{V}_h^{(n)}, \quad n = 1, 2.$$

Рассмотрим случай, когда $n = 1$. Для краткости изложения опустим этот индекс. Из неравенства Коши–Буняковского получим

$$|B_h(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leqslant |\mathbf{u}_\tau|_{L^2(\Gamma_D)}|\mathbf{v}_\tau|_{L^2(\Gamma_D)} + |[\![\mathbf{u}]\!]|_{L^2(\Gamma_{\rm int})}|[\![\mathbf{v}]\!]|_{L^2(\Gamma_{\rm int})} \leqslant \|\mathbf{u}\|_{1,V}\|\mathbf{v}\|_{1,V}.$$

Для $n = 2$ доказательство аналогично.

Далее докажем коэрцитивность. Это значит, что справедливо неравенство

$$B_h^{(n)}(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}) \geqslant c\|\mathbf{u}^{(n)}\|_{n,V}^2, \quad c = \mathrm{const} > 0, \quad \forall \mathbf{u}^{(n)} \in \mathbf{V}_h^{(n)}, \quad n = 1, 2.$$

Действительно,

$$B_h^{(n)}(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}) = J(\mathbf{u}^{(n)}, 0, T_h) = \|\mathbf{u}^{(n)}\|_{n,V}^2, \quad n = 1, 2.$$

Наконец, покажем галеркинскую ортогональность. Из непротиворечивости и линейности билинейной формы $B_h^{(n)}$, $n = 1, 2$, следует, что

$$B_h^{(n)}(\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}, \mathbf{v}^{(n)}) = F_h^{(n)}(\mathbf{v}^{(n)}) - B_h^{(n)}(\mathbf{u}_h^{(n)}, \mathbf{v}^{(n)}) = 0, \quad \forall \mathbf{v}^{(n)} \in \mathbf{V}_h^{(n)}.$$

Докажем неравенство (20), которое является аналогом леммы Cea [1]. Используя свойство коэрцитивности, получим

$$\|\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}\|_{n,V}^2 = B_h^{(n)}(\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}, \mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}) =$$
$$= B_h^{(n)}(\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}, \mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{v}_h^{(n)}) + B_h^{(n)}(\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}, \mathbf{v}_h^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}).$$

Из непрерывности билинейных форм и галеркинской ортогональности вытекает, что

$$B_h^{(n)}(\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}, \mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{v}_h^{(n)}) \leqslant \|\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}\|_{n,V} \|\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{v}_h^{(n)}\|_{n,V},$$
$$B_h^{(n)}(\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}, \mathbf{v}_h^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}) = 0.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{u}_h^{(n)}\|_{n,V} \leqslant \|\mathbf{u}_*^{(n)} - \mathbf{v}_h^{(n)}\|_{n,V}, \quad n = 1, 2.$$

Так как $\mathbf{v}_h^{(n)}$ — любая вектор-функция из $\mathbf{V}_h^{(n)}$, то выполняется (20).

Замечание. Коэрцитивность билинейных форм подразумевает однозначную разрешимость задач (4) и (7).

3. СВОЙСТВА БАЗИСА

В соответствии с предположением о регулярности разбиения T_h рассмотрим представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа [14] внутри сферы, описанной вокруг $\Omega_k \in T_h$. В системе координат $\hat{x} = (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ с центром $y^{(k)}$, совпадающим с центром Ω_k, для $\hat{\varphi} \in Z_0^{(p_k)}(\Omega_k)$ имеем

$$\hat{\varphi}(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}) = \sum_{n=1}^{p_k} (\hat{r}/h_k)^n \sum_{k=0}^{n} (\hat{A}_{nk} \cdot \hat{Y}_{n,k}^{(1)}(\hat{\theta}, \hat{\phi}) + \hat{B}_{nk} \cdot \hat{Y}_{n,k}^{(2)}(\hat{\theta}, \hat{\phi})),$$

где $\hat{A}_{nk}, \hat{B}_{nk}$ — некоторые коэффициенты,

$$\hat{Y}^{(1)}_{n,k}(\hat{\theta},\hat{\phi}) = \cos(k\hat{\phi}) \cdot P^{(k)}_n(\cos\hat{\theta}), \quad \hat{Y}^{(2)}_{n,k}(\hat{\theta},\hat{\phi}) = \sin(k\hat{\phi}) \cdot P^{(k)}_n(\cos\hat{\theta}).$$

Пусть $m(p_k) = \sum_{i=1}^{p_k}(2 \cdot i + 1)$. В качестве гармонических функций $f_1, f_2, \ldots, f_{m(p_k)}$ для построения базиса выбираем функции, умножаемые на коэффициенты $\hat{A}_{10}, \hat{A}_{11}, \hat{B}_{11}, \hat{A}_{20}, \hat{A}_{21}, \hat{B}_{21}, \ldots$ Для быстрого вычисления f_j и ∇f_j используются рекуррентные формулы [10].

Введем следующие обозначения:

$$W^m_G(\Omega) = \{\mathbf{v} = \nabla\varphi : \varphi \in W^{m+1}_2(\Omega)\},$$

$$\widetilde{W}^m_G(\Omega) = \left\{\mathbf{v} = \nabla\varphi : \varphi \in W^{m+1}_2(\Omega), \quad \int\limits_{\Gamma_0} \varphi dS = 0, \Gamma_0 \subset \partial\Omega\right\},$$

и пусть

$$Z^p_{0,G}(\Omega) = \{\mathbf{v} = \nabla\varphi, \varphi \in Z^{p+1}_0(\Omega)\},$$

а также $T^{(0)}_h = \{\Omega_k \in T_h : (\partial\Omega_k \cap \partial\Omega) = \emptyset\}$.

Для исследования аппроксимационных свойств базиса для каждого $\Omega_k \subset T_h$ определим отображения $\pi^{(i)}_{p_k} : L^2(\partial\Omega_k) \to Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k)$:

$$\pi^{(i)}_{p_k}\mathbf{u}|_{\Omega_k} = \sum_{j=1}^{m(p_k+1)} \alpha^{(i)}_j \nabla f_j((\hat{x} - y^{(k)})/h_k), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

где $\nabla f_j \in Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k)$; h_k — диаметр Ω_k; $y^{(k)}$ — координаты центра Ω_k, а коэффициенты $\alpha^{(i)}_j$ определяются из следующих условий при $\mathbf{u} \in L^2(\partial\Omega_k)$, $\mathbf{v} \in Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k)$:

1) если $Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k) \subset V^p(T_h)$ или $Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k) \subset V^p_0(T_h)$, $\Omega_k \subset T^{(0)}_h$:

$$(\pi^{(0)}_{p_k}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\partial\Omega_k} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\partial\Omega_k};$$

2) если $Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k) \subset V^p_0(T_h)$, $\Omega_k \subset T^{(1)}_h$:

$$((\pi^{(1)}_{p_k}\mathbf{u})_\tau, \mathbf{v}_\tau)_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D)} + (\pi^{(1)}_{p_k}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{(\partial\Omega_k \setminus \Gamma_D)} = \\ = (\mathbf{u}_\tau, \mathbf{v}_\tau)_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D)} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{(\partial\Omega_k \setminus \Gamma_D)};$$

3) если $Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k) \subset V^p_0(T_h)$, $\Omega_k \subset T^{(2)}_h$:

$$((\pi^{(2)}_{p_k}\mathbf{u})_n, v_n)_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N)} + (\pi^{(2)}_{p_k}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{(\partial\Omega_k \setminus \Gamma_N)} = \\ = (u_n, v_n)_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N)} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{(\partial\Omega_k \setminus \Gamma_N)};$$

4) если $Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k) \subset V^p_0(T_h)$, $\Omega_k \subset T^{(3)}_h$, $\partial\Omega'_k = \partial\Omega_k \backslash (\Gamma_D \cup \Gamma_N)$:

$$((\pi^{(3)}_{p_k}\mathbf{u})_\tau, \mathbf{v}_\tau)_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_D)} + ((\pi^{(3)}_{p_k}\mathbf{u})_n, v_n)_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_N)} + (\pi^{(3)}_{p_k}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\partial\Omega'_k} =$$
$$= (\mathbf{u}_\tau, \mathbf{v}_\tau)_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_D)} + (u_n, v_n)_{(\partial\Omega_k\cap\Gamma_N)} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\partial\Omega'_k}.$$

Используя введенные отображения, определим интерполяционные операторы $\Pi^{(1)}_{hp} : L^2(\Gamma_{\text{int}} \cup \partial\Omega) \to V^p(T_h)$ и $\Pi^{(2)}_{hp} : L^2(\Gamma_{\text{int}} \cup \partial\Omega) \to V^p_0(T_h)$. Для $\Pi^{(1)}_{hp}$ имеем

$$(\Pi^{(1)}_{hp}\mathbf{u})|_{\Omega_k} = (\pi^{(0)}_{p_k}\mathbf{u}|_{\Omega_k}), \quad \forall\Omega_k \subset T_h,$$

$$(\Pi^{(1)}_{hp}\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = \sum_{\Omega_k\subset T_h} (\pi^{(0)}_{p_k}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_k}, \quad \forall\mathbf{v} \in V^p(T_h).$$

Для $\Pi^{(2)}_{hp}$ имеем

$$(\Pi^{(2)}_{hp}\mathbf{u})|_{\Omega^{(i)}_k} = (\pi^{(i)}_{p_k}\mathbf{u}|_{\Omega^{(i)}_k}), \quad \forall\Omega^{(i)}_k \subset T^{(i)}_h, i = 0, 1, 2, 3,$$

$$(\Pi^{(2)}_{hp}\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = \sum_{i=0}^{3} \sum_{\Omega_k\subset T^{(i)}_h} (\pi^{(i)}_{p_k}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_k}, \quad \forall\mathbf{v} \in V^p_0(T_h).$$

Лемма 3.1. *1) Проекторы $\pi^{(i)}_{p_k} : L^2(\partial\Omega_k) \to Z^{p_k}_{0,G}(\Omega_k)$, $i = 0, 1, 2, 3$, для любого $\Omega_k \subset T_h$ обладают свойством*

$$\pi^{(i)}_{p_k}(\mathbf{u}) = \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ — градиент гармонического многочлена степени $p_k + 1$.

2) Для каждого $\Omega_k \subset T_h$ при $n = 0, 1$ и некотором целом $m \geqslant 1$ существуют такие постоянные $C(\pi^{(i)}_m, \Omega_k)$, $i = 0, 1, 2, 3$, что для каждой вектор-функции $\mathbf{v} \in W^{m+1}_G(\Omega_k)$

$$|\mathbf{v} - \pi^{(i)}_m(\mathbf{v})|_{n,\Omega_k} \leqslant C(\pi^{(i)}_m, \Omega_k)(h^{m+1}_k/\rho^n_k)|\mathbf{v}|_{m+1,\Omega_k}. \tag{21}$$

Доказательство. Покажем, что коэффициенты $\alpha^{(i)}_j$, $i = 0, 1, 2, 3$, в определении проекторов однозначно находятся по виду градиента гармонического многочлена $\mathbf{u}$ для любого $\Omega_k \subset T_h$. Это будет означать справедливость первого утверждения леммы, так как задачи для определения коэффициентов проекторов по лемме 3.2 имеют единственные решения. Поскольку $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, то однозначность нахождения коэффициентов $\alpha^{(i)}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m(p_k + 1)$, достаточно доказать для гармонического многочлена φ, а затем его продифференцировать. Пусть, согласно [14], в системе координат (r, θ, ϕ), связанной со всей областью Ω, для $\varphi \in Z_0^{p_k+1}(\Omega)$ имеем

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{p_k+1} (r/R)^n \sum_{k=0}^{n} (A_{nk} \cdot Y_{n,k}^{(1)}(\theta, \phi) + B_{nk} \cdot Y_{n,k}^{(2)}(\theta, \phi)), \qquad (22)$$

где A_{nk}, B_{nk} — известные коэффициенты, R — радиус описанной сферы.

Зададим этот многочлен на сфере, описанной вокруг элемента Ω_k. Тогда в локальной системе координат $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, связанной с Ω_k, получим

$$\hat{\varphi}(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{r}/h_k)^n \sum_{k=0}^{n} (\hat{A}_{nk} \cdot \hat{Y}_{n,k}^{(1)}(\hat{\theta}, \hat{\phi}) + \hat{B}_{nk} \cdot \hat{Y}_{n,k}^{(2)}(\hat{\theta}, \hat{\phi})),$$

где

$$\hat{A}_{nk} = \sigma_{nk} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi \cdot \hat{Y}_{n,k}^{(1)}(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \cdot \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\varphi},$$

$$\hat{B}_{nk} = \sigma_{nk} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi \cdot \hat{Y}_{n,k}^{(2)}(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \cdot \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\varphi},$$

и $\sigma_{nk} = (2n+1)(n-k)!/((2\pi)(n+k)!)$. Покажем, что $\hat{A}_{nk} = \hat{B}_{nk} = 0$ при $n > p_k + 1$, $k \leqslant n$. Методом индукции докажем, что $Y_{n,k}^{(1)}(\theta, \phi)$, $Y_{n,k}^{(2)}(\theta, \phi)$ из (22) выражаются через зависящие от $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ тригонометрические многочлены степени не выше $p_k + 1$. Учтем ортогональность сферических функций $\hat{Y}_{n,k}^{(1)}$, $\hat{Y}_{n,k}^{(2)}$ [14] и связь между системами координат:

$$r \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta = \hat{r} \cdot \cos \hat{\phi} \cdot \sin \hat{\theta} + y_1^{(k)}, \quad r \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta = \hat{r} \cdot \sin \hat{\phi} \cdot \sin \hat{\theta} + y_2^{(k)},$$

$$r \cdot \cos \theta = \hat{r} \cdot \cos \hat{\theta} + y_3^{(k)}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что утверждение верно при $p_k = 1$: $Y_{1,0}^{(1)}(\theta, \phi) = (\hat{r}/r) \cdot \cos \hat{\theta} + y_3^{(k)}/r$, $Y_{1,1}^{(1)}(\theta, \phi) = (\hat{r}/r) \cdot \cos \hat{\phi} \cdot \sin \hat{\theta} + y_1^{(k)}/r$, $Y_{1,0}^{(2)}(\theta, \phi) = 0$, $Y_{1,1}^{(2)}(\theta, \phi) = (\hat{r}/r) \cdot \sin \hat{\phi} \cdot \sin \hat{\theta} + y_2^{(k)}/r$. Предположим, что утверждение верно для $n = p_k$, докажем его для $m = p_k + 1$. Используем рекуррентные формулы для $Y_{n,k}^{(1)}$, $Y_{n,k}^{(2)}$, которые следуют из рекуррентных формул [15] для $P_n^{(k)}$ и формул для тригонометрических функций от суммы углов:

$$Y_{m,0}^{(1)}(\theta, 0) = ((2m-1)/m) \cdot \cos \theta \cdot Y_{m-1,0}^{(1)}(\theta, 0) - ((m-1)/m) \cdot Y_{m-2,0}^{(1)}(\theta, 0),$$

$$Y_{m,0}^{(2)}(\theta, 0) = 0;$$

$$Y_{m,k}^{(1)}(\theta,\phi) = (2m-1)\cdot Y_{m-1,k-1}^{(1)}(\theta,\phi)\cdot(\sin\theta\cdot\cos\phi) - (2m-1)\cdot Y_{m-1,k-1}^{(2)}(\theta,\phi)\times$$
$$\times(\sin\theta\cdot\sin\phi) + Y_{m-2,k}^{(1)}(\theta,\phi),$$

$$Y_{m,k}^{(2)}(\theta,\phi) = (2m-1)\cdot Y_{m-1,k-1}^{(2)}(\theta,\phi)\cdot(\sin\theta\cdot\cos\phi) - (2m-1)\cdot Y_{m-1,k-1}^{(1)}(\theta,\phi)\times$$
$$\times(\sin\theta\cdot\sin\phi) + Y_{m-2,k}^{(2)}(\theta,\phi).$$

Отсюда следует утверждение индукции и поэтому в силу ортогональности сферических функций функция $\hat\varphi(\hat r,\hat\theta,\hat\phi)$ также представляется в виде суммы $m(p_k+1)$ слагаемых. Учитывая, что $(\hat r/h_k)^n\cdot\hat Y_{n,k}^{(i)}(\hat\theta,\hat\phi)$, $i=1,2$, являются гармоническими многочленами в локальной системе координат, получим

$$\alpha_1^{(i)} = \hat A_{10}; \alpha_2^{(i)} = \hat A_{11}; \alpha_3^{(i)} = \hat B_{11}; \alpha_4^{(i)} = \hat A_{20}; \alpha_5^{(i)} = \hat A_{21}; \alpha_6^{(i)} = \hat B_{21}; \ldots$$

при всех $i=0,1,2,3$. Таким образом, коэффициенты проекторов $\pi_{p_k}^{(i)}(\mathbf{u})$ находятся однозначно и заданный градиент гармонического многочлена степени p_k+1 в локальной системе координат восстанавливается точно.

Оценка (21) следует из свойства проекторов $\pi_{p_k}^{(i)}$ и теоремы 3.1.4 из книги [1] при использовании преобразования подобия, которое сохраняет гармоничность и является частным случаем аффинного преобразования.

Вместе со вспомогательными задачами (17)–(19) будем рассматривать задачу на $\Omega_n\subset T_h^{(0)}$ при $\mathbf{u}\in V^p(T_h)$ или $\mathbf{u}\in V_0^p(T_h)$:

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = 0,\quad \nabla\times\mathbf{u}_0 = 0,\quad x\in\Omega_n;\quad \mathbf{u}_0 = [\![\mathbf{u}]\!],\quad x\in\partial\Omega_n. \tag{23}$$

Лемма 3.2. *Задачи (23), (17)–(19) имеют единственное решение* $\mathbf{u}_i$, $i = 0,1,2,3$ *соответственно. Если для нахождения этих решений используется гармоническая аппроксимация порядка не ниже, чем порядок заданных на границе гармонических многочленов, и для численного интегрирования используется кубатурная формула, которая обеспечивает точное вычисление интегралов по границе элементов, то* $\mathbf{u}_0|_{\Omega_n} = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1|_{\Omega_i} = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2|_{\Omega_j} = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_3|_{\Omega_l} = \mathbf{u}$. *Кроме того, справедливы неравенства*

$$|u_{1,n}|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_D)} \leqslant C_1^{(i)}(|\mathbf{u}_\tau|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_D)} + |[\![\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_{\text{int}})}), \tag{24}$$

$$|\mathbf{u}_{2,\tau}|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)} \leqslant C_2^{(j)}(|u_n|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)} + |[\![\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_{\text{int}})}), \tag{25}$$

$$|u_{3,n}|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_D)} + |\mathbf{u}_{3,\tau}|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_N)} \leqslant C_3^{(l)}(|\mathbf{u}_\tau|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_D)} +$$
$$+ |u_n|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_N)} + |[\![\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_{\text{int}})}), \tag{26}$$

где $C_1^{(i)}$, $C_2^{(j)}$, $C_3^{(l)}$ *— положительные константы, не зависящие от* $\mathbf{u}$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (23). Пусть $m(p+1)$ — необходимое число градиентов гармонических многочленов для получения точного решения задачи, и $\mathbf{u}_0 = \sum\limits_{j=1}^{m(p+1)} \alpha_j^{(0)} \nabla f_j$, где f_j — гармонические функции базиса, $f_j \in Z_0^{p+1}(\Omega_i)$, $\alpha_j^{(0)}$ — искомые коэффициенты. Для нахождения коэффициентов имеем систему

$$(\mathbf{u}_0, \nabla f_l)_{\partial\Omega_n} = ([\![\mathbf{u}]\!], \nabla f_l)_{\partial\Omega_n}, \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

Эта система однозначно разрешима ввиду (39), (41) из леммы 5.1.

Рассмотрим задачи (17)–(19) и докажем неравенства (24)–(26). Доказательства проводятся по одной схеме. Для задачи (17) при минимизации функционала

$$\Phi_1(\mathbf{u}_1) = \int\limits_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_D} (\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}))^2 dS + \int\limits_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\text{int}}} (\mathbf{u}_1 - [\![\mathbf{u}]\!])^2 dS$$

имеем систему

$$(\mathbf{u}_{1,\tau}, \nabla_\tau f_l)_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_D)} + (\mathbf{u}_1, \nabla f_l)_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\text{int}})} = (\mathbf{u}_\tau, \nabla_\tau f_l)_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_D)} + \\ + ([\![\mathbf{u}]\!], \nabla f_l)_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\text{int}})}, \quad l = 1, 2, \ldots, m. \quad (27)$$

Матрица системы (27) является невырожденной, поскольку при $\mathbf{u}_1 = \nabla\varphi_1$ справедливы неравенства

$$|\mathbf{u}_{1,\tau}|^2_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_D)} + |\mathbf{u}_1|^2_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\text{int}})} = |\mathbf{u}_{1,\tau}|^2_{\partial\Omega_i} + |u_{1,n}|^2_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\text{int}})} \geqslant \\ \geqslant |\nabla_\tau \varphi_1|^2_{\partial\Omega_i} > c_i \|\varphi_1\|_{L^2(\partial\Omega_i)}. \quad (28)$$

Здесь $c_i > 0$. Последнее неравенство следует из леммы 5.1. Через $A_1^{-1} = \{\bar{a}_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1,\ldots,m}$ обозначим обратную матрицу системы (27). Тогда для решения $\mathbf{X}^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)})$ этой системы получим

$$\alpha_l^{(1)} = \sum_{j=1}^m \bar{a}_{lj}^{(1)} \left(\int\limits_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_D} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla f_j) dS + \int\limits_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\text{int}}} [\![\mathbf{u}]\!] \cdot \nabla f_j dS \right) = \\ = \int\limits_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_D} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \left(\sum_{j=1}^m \bar{a}_{lj}^{(1)} (\mathbf{n} \times \nabla f_j) \right) dS + \int\limits_{\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\text{int}}} [\![\mathbf{u}]\!] \cdot \left(\sum_{j=1}^m \bar{a}_{lj}^{(1)} \nabla f_j \right) dS.$$

Отсюда, возводя в квадрат обе части уравнения и суммируя по l, получим оценку в евклидовых нормах

$$\|\mathbf{X}^{(1)}\|_2^2 \leqslant C_\alpha^{(1)} |\mathbf{u}_\tau|^2_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_D)} + C_\gamma^{(1)} |[\![\mathbf{u}]\!]|^2_{(\partial\Omega_i \cap \Gamma_{\text{int}})}, \quad (29)$$

где

$$C_\alpha^{(1)}=2\cdot\|A_1^{-1}\|_2^2\cdot|\|\mathbf{n}\times\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_D)},\quad C_\gamma^{(1)}=2\cdot\|A_1^{-1}\|_2^2\cdot|\|\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_{\text{int}})}.$$

Здесь $\mathbf{Q}=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$. Далее, используя (29), докажем (24). Согласно неравенству Коши–Буняковского

$$\int\limits_{\partial\Omega_i\cap\Gamma_D}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_1)^2dS=\int\limits_{\partial\Omega_i\cap\Gamma_D}\left(\sum_{j=1}^m\alpha_j^{(1)}(\mathbf{n}\cdot\nabla f_j)\right)^2dS\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathbf{X}^{(1)}\|_2^2\int\limits_{\partial\Omega_i\cap\Gamma_D}\|\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{Q}\|_2^2dS\leqslant$$
$$\leqslant C_1^{(i)}\left(\int\limits_{\partial\Omega_i\cap\Gamma_D}(\mathbf{n}\times\mathbf{u})^2dS+\int\limits_{\partial\Omega_i\cap\Gamma_{\text{int}}}([\![\mathbf{n}\times\mathbf{u}]\!]^2+[\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]\!]^2)dS\right),$$

где

$$C_1^{(i)}=\max\{C_\alpha^{(1)},C_\gamma^{(1)}\}\cdot|\|\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_i\cap\Gamma_D)}.$$

Аналогично доказывается неравенство (25). Здесь важно отметить однозначную разрешимость системы для решения задачи (18):

$$(u_{2,n},\partial f_l/\partial n)_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)}+(\mathbf{u}_2,\nabla f_l)_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_{\text{int}})}=(u_n,\partial f_l/\partial n)_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)}+$$
$$+([\![\mathbf{u}]\!],\nabla f_l)_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_{\text{int}})},\quad l=1,2,\ldots,m. \quad (30)$$

При $\mathbf{u}_2=\nabla\varphi_2$ имеем следующие неравенства:

$$|u_{2,n}|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)}+|\mathbf{u}_2|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_{\text{int}})}=|u_{2,n}|^2_{\partial\Omega_j}+|\mathbf{u}_{2,\tau}|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_{\text{int}})}\geqslant$$
$$\geqslant|\partial\varphi_2/\partial n|^2_{\partial\Omega_j}>c_j\|\varphi_2\|_{L^2(\partial\Omega_j)}. \quad (31)$$

Здесь $c_j>0$. Последнее неравенство следует из леммы 5.1. Дальнейшая схема доказательства такая же, как для первого случая. Неравенство (25) получается при

$$C_2^{(j)}=\max\{C_\beta^{(2)},C_\gamma^{(2)}\}\cdot|\|\mathbf{n}\times\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)},$$

где

$$C_\beta^{(2)}=2\cdot\|A_2^{-1}\|_2^2\cdot|\|\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_N)},\quad C_\gamma^{(2)}=2\cdot\|A_2^{-1}\|_2^2\cdot|\|\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_j\cap\Gamma_{\text{int}})}.$$

Через A_2^{-1} обозначена обратная матрица системы (30).

Для доказательства неравенства (26) применим подход, аналогичный двум первым случаям. Однозначная разрешимость задачи (19) следует из неравенств, аналогичных (28) и (31). Неравенство (26) справедливо при

$$C_3^{(l)} = \max\{C_\alpha^{(3)}, C_\beta^{(3)}, C_\gamma^{(3)}\} \cdot (|||\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_D)} + |||\mathbf{n}\times\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_N)}),$$

где

$$C_\alpha^{(3)} = 3\cdot\|A_3^{-1}\|_2^2\cdot|||\mathbf{n}\times\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_D)},$$
$$C_\beta^{(3)} = 3\cdot\|A_3^{-1}\|_2^2\cdot|||\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_N)},$$
$$C_\gamma^{(3)} = 3\cdot\|A_3^{-1}\|_2^2\cdot|||\nabla\mathbf{Q}\|_2|^2_{(\partial\Omega_l\cap\Gamma_{\mathrm{int}})}.$$

Здесь через A_3^{-1} обозначена обратная матрица системы для решения задачи (19).

4. h-СХОДИМОСТЬ

Доказательство h-сходимости метода проводится по схеме, обычной для разрывного метода Галеркина [4]. Здесь учитывается теорема 2.1 о свойстве билинейных форм и леммы 3.1, 3.2.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathbf{u}_*^{(1)}$ и $\mathbf{u}_h^{(1)}$ — точное и приближенное решения задачи (4) соответственно. И пусть $\mathbf{u}_*^{(1)} \in W_G^{m+1}(\Omega)$, $m \geqslant 1$. Тогда для погрешности решения $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_*^{(1)} - \mathbf{u}_h^{(1)}$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{e}_1\|^2_{1,V} < \sum_{\Omega_k\subset T_h} C_k^{(1)}\cdot h_k^{2m+1}\cdot|\mathbf{u}_*^{(1)}|^2_{W_G^{m+1}(\Omega)}, \tag{32}$$

где $C_k^{(1)}$ — положительная константа, не зависящая от $\mathbf{u}_*^{(1)}$.

Доказательство. Представим погрешность в виде

$$\mathbf{u}_*^{(1)} - \mathbf{u}_h^{(1)} = (\mathbf{u}_*^{(1)} - \Pi_{hp}^{(1)}\mathbf{u}_*^{(1)}) + (\Pi_{hp}^{(1)}\mathbf{u}_*^{(1)} - \mathbf{u}_h^{(1)}) = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2. \tag{33}$$

С учетом теоремы 2.1 имеем

$$\|\mathbf{z}_2\|^2_{1,V} = B_h^{(1)}(\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_2) = B_h^{(1)}(\mathbf{u}_*^{(1)} - \mathbf{u}_h^{(1)} - \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = -B_h^{(1)}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2) \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{z}_1\|_{1,V}\cdot\|\mathbf{z}_2\|_{1,V}.$$

Отсюда $\|\mathbf{z}_2\|_{1,V} \leqslant \|\mathbf{z}_1\|_{1,V}$, и поэтому необходимо оценить только $\|\mathbf{z}_1\|_{1,V}$. Имеем

$$\|\mathbf{z}_1\|^2_{1,V} = \sum_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega)\subset T_h} |\mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega)} + \sum_{\Gamma_{ij}\subset\Gamma_{\text{int}}} |[\![\mathbf{z}_1]\!]|^2_{\Gamma_{ij}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega)\subset T_h} |\mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega)} + \sum_{\Gamma_{ij}\subset\Gamma_{\text{int}}} 2\cdot \int\limits_{\Gamma_{ij}} (|\mathbf{z}_1|_{\Omega_i}|^2 +$$
$$+ |\mathbf{z}_1|_{\Omega_j}|^2)dS < 2\cdot \sum_{\Omega_k\subset T_h} \|\mathbf{z}_1\|^2_{L^2(\partial\Omega_k)}. \quad (34)$$

Далее используем стандартное неравенство для следа функции из $W_2^1(\Omega_k)$ [4]:

$$\|z_{1,i}\|^2_{L^2(\partial\Omega_k)} \leqslant 3(h_k/\rho_k)(\|z_{1,i}\|^2_{L^2(\Omega_k)}\cdot|z_{1,i}|^2_{W_2^1(\Omega_k)} + h_k^{-1}\|z_{1,i}\|^2_{L^2(\Omega_k)}),$$

где $z_{1,i}$ — i-я компонента $\mathbf{z}_1$; h_k — диаметр Ω_k; ρ_k — радиус вписанной сферы. Используя ε-неравенство при $\varepsilon = (\sqrt{2}+1)h_k$, получим

$$\|z_{1,i}\|^2_{L^2(\partial\Omega_k)} \leqslant 4(h_k/\rho_k)(h_k^{-1}\|z_{1,i}\|^2_{L^2(\Omega_k)} + h_k|z_{1,i}|^2_{W_2^1(\Omega_k)}).$$

Учитывая ограниченность h_k/ρ_k, просуммируем это неравенство для $i = 1, 2, 3$:

$$\|\mathbf{z}_1\|^2_{L^2(\partial\Omega_k)} \leqslant C_k^{'}(h_k^{-1}\|\mathbf{z}_1\|^2_{L^2(\Omega_k)} + h_k|\mathbf{z}_1|^2_{W_2^1(\Omega_k)}).$$

Из леммы 3.1, которая дает оценки для правой части неравенства, получим

$$\|\mathbf{z}_1\|^2_{L^2(\partial\Omega_k)} \leqslant C_k^{''} h_k^{2m+1}|\mathbf{u}_*^{(1)}|^2_{W_G^{m+1}(\Omega_k)}.$$

Суммируя это неравенство по всем $\Omega_k \subset T_h$ и учитывая (34), для (33) получаем оценку в виде (32).

При доказательстве следующей теоремы будем предполагать, что для любой вектор-функции $\mathbf{v} \in W_G^1(\Omega_{k,n})$, $\Omega_{k,n} \in T_h^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$, для следов функций справедливы неравенства

$$|\mathbf{n}\times\mathbf{v}|^2_{(\partial\Omega_{k,1}\cap\Gamma_D)} + |\mathbf{v}|^2_{(\partial\Omega_{k,1}\cap\Gamma_{\text{int}})} \leqslant C_{k,1}\|\mathbf{v}\|^2_{W_G^1(\Omega_{k,1})}, \quad (35)$$

$$|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|^2_{(\partial\Omega_{k,2}\cap\Gamma_N)} + |\mathbf{v}|^2_{(\partial\Omega_{k,2}\cap\Gamma_{\text{int}})} \leqslant C_{k,2}\|\mathbf{v}\|^2_{W_G^1(\Omega_{k,2})}, \quad (36)$$

$$|\mathbf{n}\times\mathbf{v}|^2_{(\partial\Omega_{k,3}\cap\Gamma_D)} + |\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|^2_{(\partial\Omega_{k,3}\cap\Gamma_N)} + |\mathbf{v}|^2_{(\partial\Omega_{k,3}\cap\Gamma_{\text{int}})} \leqslant C_{k,3}\|\mathbf{v}\|^2_{W_G^1(\Omega_{k,3})}, \quad (37)$$

где $C_{k,n}$, $n = 1, 2, 3$, — не зависящие от $\mathbf{v}$ положительные постоянные.

Замечание. Если $\mathbf{v} \in Z^p_{0,G}(\Omega)$, $p \geqslant 2$, то справедливость предполагаемых неравенств для следов функций доказывается с помощью подхода из леммы 3.2.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathbf{u}_*^{(2)}$ *и* $\mathbf{u}_h^{(2)}$ *— точное и приближенное решения задачи (7) соответственно. И пусть* $\mathbf{u}_*^{(2)} \in \widetilde{W}_G^{m+1}(\Omega)$, $m \geqslant 1$, *и для любой вектор-функции* $\mathbf{v} \in W_G^1(\Omega_{k,n})$, $\Omega_{k,n} \in T_h^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$, *выполняются неравенства (35)–(37). Тогда для погрешности решения* $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_*^{(2)} - \mathbf{u}_h^{(2)}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{e}_2\|_{2,V}^2 < \sum_{\Omega_k \subset T_h} C_k^{(2)} \cdot h_k^{2m+1} \cdot |\mathbf{u}_*^{(2)}|^2_{\widetilde{W}_G^{m+1}(\Omega)}, \tag{38}$$

где $C_k^{(2)}$ *— положительная константа, не зависящая от* $\mathbf{u}_*^{(2)}$.

Доказательство. Аналогично случаю теоремы 4.1 для задачи (7) имеем

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{u}_*^{(2)} - \Pi_{hp}^{(2)} \mathbf{u}_*^{(2)}, \quad \mathbf{z}_2 = \Pi_{hp}^{(2)} \mathbf{u}_*^{(2)} - \mathbf{u}_h^{(2)}.$$

С учетом свойств билинейной формы $B_h^{(2)}$ требуется оценка только для $\|\mathbf{z}_1\|_{2,V}$:

$$\|\mathbf{z}_1\|_{2,V}^2 = \sum_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D) \subset T_h} |\mathbf{n} \times \mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D)} + \sum_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N) \subset T_h} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N)} + \\ + \sum_{\Gamma_{ij} \subset \Gamma_{\text{int}}} |[\![\mathbf{z}_1]\!]|^2_{\Gamma_{ij}}.$$

Оценивая интегралы по $\Gamma_{ij} \subset \Gamma_{\text{int}}$ так же, как при доказательстве теоремы 4.1, и удваивая две другие суммы, получим

$$\|\mathbf{z}_1\|_{2,V}^2 < 2 \cdot \Bigg\{ \sum_{\Omega_k \subset T_h^{(0)}} |\mathbf{z}_1|^2_{\partial\Omega_k} + \sum_{\Omega_k \subset T_h^{(1)}} \left(|\mathbf{n} \times \mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D)} + \right. \\ \left. + |\mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_{\text{int}})} \right) + \sum_{\Omega_k \subset T_h^{(2)}} \left(|\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N)} + |\mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_{\text{int}})} \right) + \\ + \sum_{\Omega_k \subset T_h^{(3)}} \left(|\mathbf{n} \times \mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_D)} + |\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_N)} + |\mathbf{z}_1|^2_{(\partial\Omega_k \cap \Gamma_{\text{int}})} \right) \Bigg\}.$$

Интегралы в первой сумме оцениваем так же, как в доказательстве теоремы 4.1, с помощью стандартного неравенства для следа функции из $W_2^1(\Omega_k)$. Для оценки слагаемых в остальных трех суммах используем неравенства (35)–

(37) для следов вектор-функций из $W^1_G(\Omega_k)$. В результате получим

$$\|\mathbf{z}_1\|^2_{2,V} < 2 \cdot \tilde{C}_k \left(\sum_{\Omega_k \subset T_h^{(0)}} \|\mathbf{z}_1\|^2_{W^1_G(\Omega_k)} + \sum_{\Omega_{k,1} \subset T_h^{(1)}} \|\mathbf{z}_1\|^2_{W^1_G(\Omega_{k,1})} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\Omega_{k,2} \subset T_h^{(2)}} \|\mathbf{z}_1\|^2_{W^1_G(\Omega_{k,2})} + \sum_{\Omega_{k,3} \subset T_h^{(3)}} \|\mathbf{z}_1\|^2_{W^1_G(\Omega_{k,3})} \right).$$

Отсюда, учитывая оценки из леммы 3.1, получим неравенство (38).

Замечание. Подтверждение оценок теорем 4.1, 4.2 на численных примерах представлено в работе [16].

5. ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма 5.1. *Пусть $\varphi \in Z^p_0(\Omega)$, $p \geqslant 2$, Ω — выпуклый многогранник, n_g — число его граней, d — диаметр Ω. Тогда справедливы неравенства*

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} < n_g^2 \cdot d^3 \cdot |\nabla_\tau \varphi|^2_{\partial\Omega}, \tag{39}$$

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} < 4 \cdot n_g \cdot d^3 \cdot |\nabla \varphi|^2_{\Omega}, \tag{40}$$

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} < 16 \cdot n_g^2 \cdot d^6 \cdot |\partial\varphi/\partial n|^2_{\partial\Omega}. \tag{41}$$

Доказательство. Рассмотрим формулу (12) при $x, y \in \partial\Omega$. Пусть $\varphi \in Z^p_0(\Omega)$. Интегрируя это равенство по $y \in \partial\Omega$, получим

$$|\partial\Omega| \cdot \varphi(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\int_y^x (\mathbf{t} \cdot \nabla\varphi) dt \right) dS_y, \quad |\partial\Omega| = \int_{\partial\Omega} dS.$$

Возведем в квадрат обе части первого равенства:

$$|\partial\Omega|^2 \cdot \varphi^2(x) = \left(\int_{\partial\Omega} \left(\int_y^x (\mathbf{t} \cdot \nabla\varphi) dt \right) dS_y \right)^2.$$

Оценим правую часть:

$$\left(\int_{\partial\Omega} \left(\int_y^x (\mathbf{t} \cdot \nabla\varphi) dt \right) dS_y \right)^2 \leqslant \left(\int_{\partial\Omega} \left| \int_y^x (\mathbf{t} \cdot \nabla\varphi) dt \right| dS_y \right)^2.$$

Учтем, что интегрирование ведется по прямым, принадлежащим граням многогранника. Кроме того, предполагаем, что эти прямые соединяют точки x и y по самому короткому пути. Тогда

$$\left|\int_y^x (\mathbf{t}\cdot\nabla\varphi)dt\right| \leqslant \left(\int_y^x dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_y^x |(\mathbf{t}\cdot\nabla\varphi)|^2 dt\right)^{1/2} <$$

$$< (n_g{\cdot}d)^{1/2}\left(\int_{\partial\Omega} |\nabla_\tau\varphi|^2 dS\right)^{1/2}.$$

Используя эту оценку, получим

$$|\partial\Omega|^2{\cdot}\varphi^2(x) < (n_g{\cdot}d){\cdot}|\partial\Omega|^2{\cdot}|\nabla_\tau\varphi|^2_{\partial\Omega}.$$

После интегрирования этого неравенства по $x \in \partial\Omega$ имеем

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} < (n_g{\cdot}d){\cdot}|\partial\Omega|{\cdot}|\nabla_\tau\varphi|^2_{\partial\Omega}.$$

Учитывая, что $|\partial\Omega| < n_g \cdot d^2$, получим (39).

Для доказательства (40) используем неравенство Пуанкаре для $\varphi \in Z_0^p(\Omega)$:

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} < |\Omega|{\cdot}d{\cdot}|\nabla\varphi|^2_\Omega, \quad |\Omega| = \int_\Omega d\Omega. \tag{42}$$

Его можно получить с помощью формулы (12) так же, как и в первом случае, при $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$. Тогда для интеграла с производной по направлению имеем

$$\left|\int_y^x (\mathbf{t}\cdot\nabla\varphi)dt\right| \leqslant \left(\int_y^x dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_y^x |(\mathbf{t}\cdot\nabla\varphi)|^2 dt\right)^{1/2} < d^{1/2}\cdot|\nabla\varphi|_\Omega. \tag{43}$$

С другой стороны, из формулы (12) следует оценка

$$\varphi^2(y) \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\left(\int_y^x (\mathbf{t}\cdot\nabla\varphi)dt\right)^2.$$

Интегрируя это неравенство по $y \in \partial\Omega$ и по $x \in \Omega$, получим

$$|\Omega|\int_{\partial\Omega}\varphi^2 dS \leqslant |\partial\Omega|{\cdot}2\int_\Omega \varphi^2 d\Omega + 2{\cdot}\int_{\partial\Omega}\int_\Omega\left(\int_y^x (\mathbf{t}\cdot\nabla\varphi)dt\right)^2 d\Omega_x dS_y.$$

Используя неравенства (42) и (43) для оценки правой части, имеем

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant |\partial\Omega|\cdot 2d\cdot|\nabla\varphi|^2_\Omega + |\partial\Omega|\cdot 2d\cdot|\nabla\varphi|^2_\Omega.$$

Отсюда следует (40).

Неравенство (41) следует из (40) и свойства гармоничности φ:

$$1/(4n_g\cdot d^3)\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} < |\nabla\varphi|^2_\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \leqslant \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}\cdot\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}.$$

Проводя сокращение на множитель $\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}$ и возводя в квадрат обе части этого неравенства, получим (41).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
2. *Demcowicz L. et al.* Computing with hp-Adaptive Finite Elements. New York: Taylor & Francis. V. 2. 2008.
3. *Arnold D. N. et al.* Unified Analysis of Discontinuous Methods for Elliptic Problems // SIAM J. Numer. Anal. 2002. V. 39. P. 1749–1779.
4. *Dolejší V., Feistauer M.* Discontinuous Galerkin Methods. Analysis and Applications to Compressible Flow. New York: Springer, 2015.
5. *Bochev P. B., Gunzburger M. D.* Least-Squares Finite Element Methods. New York: Springer, 2009.
6. *Khan A. et al.* Spectral Element Method for Three Dimensional Elliptic Problems with Smooth Interfaces // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2017. V. 315. P. 522–549.
7. *Hiptmair R. et al.* Approximation by Harmonic Polynomials in Star-Shaped Domains and Exponential Convergence of Trefftz hp-DGFEM // ESAIM: M2AN. 2014. V. 48. P. 727–752.
8. *Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.
9. *Юлдашев О. И., Юлдашева М. Б.* Граничный метод взвешенных невязок с разрывными базисными функциями для высокоточного решения краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2013. №4. С. 18–28,
10. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The Finite Element Methods. V. 1: The Basis. Oxford: Butterworth–Heinemann, 2000.
11. *Юлдашева М. Б., Юлдашев О. И.* Разработка алгоритмов и модулей программ для высокоточного решения сложных трехмерных задач магнитостатики // JINR LIT Scientific Report 2012–2013. Dubna: JINR, 2014. P. 105–108.

12. *Monk P.* Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Oxford: Clarendon Press, 2003.
13. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
14. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
16. *Yuldasheva M. B., Yuldashev O. I.* Applications of Harmonic Basis of a High Order for Solving Some Magnetostatic Problems. JINR Preprint E11-2017-68. Dubna, 2017.

Получено 28 сентября 2017 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 20.11.2017.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,69. Уч.-изд. л. 2,03. Тираж 215 экз. Заказ № 59273.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/