

Э. А. Айрян^{1,*}, М. Д. Малых^{2,**}, Л. А. Севастьянов^{1,2,***}

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ
И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ**

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

² Российский университет дружбы народов, Москва

* E-mail: ayrtjan@jinr.ru

** E-mail: malykh_md@rudn.university

*** E-mail: sevastianov_la@rudn.university

Айрян Э. А., Малых М. Д., Севастьянов Л. А.

P11-2018-17

Метод конечных разностей и интегрирование дифференциальных уравнений в конечном виде

Вначале показано, что стандартные подходы к интегрированию дифференциальных уравнений в конечном виде содержат ссылку на численные методы прошлых веков. Далее описан класс дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих разностные схемы, счет по которым можно продолжать за подвижные особые точки. После необходимого введения мы описываем такую разностную схему для уравнения Риккати и доказываем ее свойство, упомянутое выше. В заключение мы представляем (n, n) -схемы для дифференциальных уравнений 1-го порядка как их естественное обобщение. Здесь мы доказываем, что $(1, 1)$ -схемы существуют только для уравнения Риккати и исследуем условия существования $(2, 2)$ -схемы.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2018

Ayryan E. A., Malykh M. D., Sevastianov L. A.

P11-2018-17

Finite Differences Method and Integration of the Differential Equations in Finite Terms

We show that standard approaches to integration of the differential equations in finite terms contain the reference to numerical methods of the last centuries. Further we describe the class of the differential equations of the first order allowing good differential schemes. This means that the calculation by such scheme can be continued after mobile singularities. After necessary introduction we describe such one-to-one scheme for the Riccati equation and prove its property mentioned above. In conclusion we present n -to- n schemes for 1st order differential equations as their natural generalization. Here we prove that one-to-one schemes exist only for the Riccati equation and investigate conditions of existence of 2-to-2 schemes.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2018

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАЗРЕШИМОСТЬ В СИМВОЛЬНОМ ВИДЕ

1.1. Единообразие математических моделей. Моделирование обязано своим появлением тому удивительному обстоятельству, что процессы, относящиеся часто к совершенно различным областям естественных наук, описываются одними и теми же уравнениями. Единообразие математических моделей явлений, принадлежащих к различным областям естествознания, часто находит философское объяснение, например, в виде принципа единства мира, реже в виде едких замечаний об отсутствии воображения у исследователей, которые можно отыскать, например, в лекциях Фейнмана. Однако суть этого единообразия, на наш взгляд, много проще: законы природы принято выражать в виде дифференциальных уравнений, а эти последние обычно имеют слишком сложные решения, чтобы их можно было выписать в сколь угодно обзримом виде. Поэтому при моделировании отбирают те особые дифференциальные уравнения, для которых можно выписать точное решение в символьном виде.

Пример 1.1. При изучении падения тел рассматривают два варианта зависимости сопротивления воздуха от скорости тела: сила пропорциональна скорости и сила пропорциональна квадрату скорости. Причины такого выбора вовсе не в том, что именно эти две зависимости хорошо описывают сопротивление воздуха, но в том, что в обоих случаях для скорости получается уравнение Риккати, которое решается известным способом. Более того, здесь при любом другом выборе зависимости не получаются уравнения, разрешимые в элементарных функциях [1]. Таким образом, из физических соображений берется лишь предположение о том, что сила зависит именно от скорости, а вид этой зависимости берется таким, чтобы математическая модель получилась «простой».

1.2. Теория Галуа в XIX веке. При создании математической модели того или иного явления стараются учесть физические причины, обуславливающие это явление, и эта сторона математического моделирования всегда находится в центре внимания исследователей. Напротив, сознательно никогда не заботятся о том, чтобы получившаяся модель была простой. Иными словами, исследователи не заботятся, чтобы задача, используемая в качестве модели,

не только была корректной, но и чтобы ее решение можно было выписать в виде обозримой формулы.

По всей видимости, классики естествознания надеялись на то, что Творец устроил Мир рационально. Поэтому задачи, составленные по вечным законам природы, должны решаться в конечном виде, нужно лишь отыскать подходящее символическое выражение. Первые успехи классической механики вполне подтверждали эту мысль, неудачи же объяснялись сложностью самих задач. Однако еще в первой половине XVIII века ряд механических задач привел к необходимости интегрирования уравнения

$$\frac{dy}{dx} = py^2 + qy + r, \quad p, q, r \in \mathbb{C}[x], \quad (1)$$

вскоре получившего название уравнения Риккати [14]. Усилия крупнейших математиков того времени, в том числе Лейбница и И. и Д. Бернулли, к успеху не привели и подготовили к началу XIX века почву для кантовского переворота вопроса: каковы должны быть законы природы для того, чтобы рациональное естествознание было возможно? Иными словами, каковы должны быть уравнения, чтобы мы вообще могли их решить? Ряд авторов XIX века — нач. XX века в той или иной мере обращались к такого рода вопросам. С этой точки зрения можно рассмотреть и работы по теории Галуа, и в первую очередь работы Лиувилля, и работы по аналитической теории дифференциальных уравнений.

Практическое значение названных работ было недооценено современниками, не видевшими за ними никакой практической пользы для естественных наук. Однако развитие компьютерной алгебры возродило интерес к старым работам по разрешимости в конечном виде, выполненным во второй половине XIX века.

Пример 1.2. Практическая важность работ Лиувилля проявилась лишь в 1960-х гг., при создании первого символического интегратора [2]. В 1830-х гг. Лиувиль исследовал вопрос о возможности интегрирования в элементарных функциях. В XIX веке самым известным результатом теории Лиувилля было утверждение о том, что интеграл ошибок

$$\int e^{-x^2} dx$$

не берется в элементарных функциях. Практическая польза от этого утверждения не велика, оно лишь поясняет, почему во всех учебниках по теории вероятностей в конце имеется таблица значений интеграла ошибок. В 1959 г. Дж. Слегль в процессе разработки своего символического интегратора Saint испытал множество вариантов формализации стандартных методов отыскания интегралов в символическом виде, однако все они оказались одинаково плохо

алгоритмизируемы. В середине 1960-х гг., при написании нового интегратора, Мозес использовал для интегрирования экспоненциальных выражений конструкции, извлеченные из работ Лиувилля. Чуть позже появился основанный на дифференциальной теории Галуа алгоритм Рунге [3], реализации тех или иных элементов которого лежат в основе почти всех современных символьных интеграторов, за исключением разве лишь Рунге Альберта Рунге [4].

1.3. Простая модель. Взглянем теперь на усилия авторов XIX века с позиций концепции математического моделирования. При создании модели того или иного явления невозможно учесть все вовлеченные в него физические явления, поэтому любое явление допускает не одну модель, а целое семейство моделей, вписанных в своего рода иерархию. На первом этапе моделирования хочется иметь грубую, но наглядную модель. С этой целью, не всегда отдавая себе отчет в этом, используют модели, описываемые дифференциальными уравнениями, разрешимыми в символьном виде. Польза от такого выбора двоякая:

- на решение задачи не нужно тратить вычислительные ресурсы;
- решение описывается несложной формулой, которой всегда можно придать физический смысл.

Попытки моделировать то или иное явление сразу, минуя этап грубой, но понятной модели, приводят к результатам, интерпретация которых требует значительных усилий.

Пример 1.3. Очень часто пытаются описать распространение электромагнитных волн сразу по методу конечных разностей, поставив ничем не оправданные граничные условия. В результате получается очень грубая из-за граничных условий модель, которая не допускает решения в символьном виде и по этой причине требует создания ресурсоемкого комплекса программ для своего анализа. При этом вычисления дают значения для полей в тех или иных точках пространства и далее требуется много усилий, чтобы хотя как-то визуализировать эти данные. Поэтому на практике предпочитают другие численно-аналитические подходы, например, разложение на моды, когда вычисляемые параметры сразу имеют понятный физический смысл.

Такой подход к моделированию возвращает к старой идее отыскания уравнений, разрешимых в том или ином смысле, но на новом уровне. Теперь мы не предполагаем, что Творец устроил Мир рационально и поэтому вечные законы природы должны интегрироваться в символьном виде. Мы лишь хотим, чтобы первые грубые модели имели как можно более простое решение. Возвращаясь к примеру 1.1, можно сказать так: мы не считаем, что в реальных экспериментах сила должна быть пропорциональна скорости или ее квадрату, поскольку Мир должен быть постижим, но для грубых моделей будем использовать именно две эти зависимости, поскольку в начало иерархии моделей хотим положить модель простую.

1.4. Какие дифференциальные уравнения интегрируются в CAS? Попробуем теперь дать определение понятия «простая модель». На практике составление простых моделей основывается на переборе. В самом деле, при составлении модели всегда имеется некоторый произвол, поэтому пробуют различные модели до тех пор, пока та или иная выбранная исследователем система компьютерной алгебры (CAS) не сможет ее проинтегрировать в символьном виде. Такой подход делает понятие «простой модели» зависящим от конкретной реализации методов символьного интегрирования дифференциальных и тем самым существенно снижает значение этого важнейшего с нашей точки зрения понятия математического моделирования.

Зная алгоритмы, реализованные в CAS, можно примерно составить представление о том, какие дифференциальные уравнения будут использоваться для создания простых моделей в рамках этого подхода. Рассмотрим, как CAS интегрируют дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad (2)$$

где p и q — рациональные функции переменных x и y . Как уже отмечалось выше при обсуждении примера 1.2, для отыскания первообразных в символьном виде алгоритмы, основанные на работах Лиувилля, уже нашли широкое применение в компьютерной алгебре. Напротив, для интегрирования в символьном виде дифференциальных уравнений применяются весьма специфические алгоритмы, часто не вполне справедливо относимые к групповому анализу дифференциальных уравнений. При ближайшем рассмотрении нетрудно заметить, что как в старых системах компьютерной алгебры, так и в новых, реализована одна и та же идея: ищется интегрирующий множитель того или иного вида.

Soldier. Первый символьный интегратор дифференциальных уравнений **Soldier** [2] был написан Дж. Мозесом (Joel Moses) в начале 1960-х годов и в доработанном виде до сих пор употребляется в **Maxima**. Этот интегратор умел определять простейшие типы дифференциальных уравнений по виду функции p/q и вычислять интегрирующий множитель в некоторых случаях. Он успешно справлялся с учебными примерами благодаря очень простому, но эффективному алгоритму отыскания интегрирующего множителя. В основе реализованного Мозесом метода интегрирования лежит следующее утверждение: уравнение (2) допускает интегрирующий множитель, зависящий только от x , в том и только в том случае, когда

$$\frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

не зависит от y . Этот множитель можно вычислить по формуле

$$\mu = \exp \left(\int \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{dx}{q} \right).$$

Для рациональных функций p и q проверка условия

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0$$

относится к числу стандартных задач компьютерной алгебры, поэтому это утверждение дает весьма простой способ отыскания множителя вида $\mu(x)$, если таковой существует. Отыскав μ по явной формуле, система составляет квадратуру

$$\int \mu(x)(pdx + qdy) = C.$$

После этого необходимо вычислить интегралы в элементарных функциях. Здесь используются те или иные элементы алгоритма Риша, при этом ни одна система компьютерной алгебры не гарантирует, что в случае неудачи интеграл действительно не берется в элементарных функциях. В случае успеха в некоторых системах выдается трансцендентное уравнение

$$F(x, y) = C,$$

в некоторых других, например, в Maple, предпринимается попытка решить это уравнение относительно y . При этом могут появиться неэлементарные функции, например, W-функция Ламберта.

Очевидным недостатком указанного метода отыскания интегрирующего множителя является то обстоятельство, что наличие или отсутствие у дифференциального уравнения множителя, зависящего только от x или только от y , определяется формой записи уравнения. Это означает, что успех или неудача в отыскании символического решения дифференциального уравнения зависит от формы его записи. Таким образом, для лиц, работающих в старых системах компьютерной алгебры, простота дифференциального уравнения зависит даже от формы записи уравнения.

Abaco. Указанный недостаток был устранен сравнительно недавно, в 2000-х гг., средствами группового анализа. Сам групповой анализ дифференциальных уравнений был создан Софусом Ли в 1880-х гг. как альтернатива для элементарных методов их интегрирования. Связь между группами симметрий и интегрирующими множителями дается знаменитой теоремой Ли: если однопараметрическое семейство преобразований

$$x_1 = x_0 + \xi(x_0, y_0)\varepsilon + \dots \quad y_1 = y_0 + \eta(x_0, y_0)\varepsilon + \dots$$

переводит интегральные кривые дифференциального уравнения в другие интегральные кривые этого уравнения, то интегрирующий множитель этого уравнения можно вычислить по формуле

$$\mu = \frac{1}{p\xi + q\eta};$$

при этом пару ξ, η называют инфинитезимальным оператором. В учебной литературе всегда подчеркивалось, что задача об отыскании таких преобразований не проще задачи об отыскании интегрирующего множителя, однако ввиду большей наглядности этого объекта подход Ли открывает простор для применения «геометрической интуиции» [5].

Коллектив под руководством Э. Чеб-Терраба (E.S. Cheb-Terrab) создал и успешно реализовал на Maple метод отыскания симметрий дифференциальных уравнений. Пакет получил название DETools, на данный момент он способен вычислить подавляющее большинство примеров, собранных в справочнике Камке [6], и, вероятно, является наиболее употребительным и мощным пакетом для символьного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Ключом к этому успеху стал метод, получивший название Абак.

В рамках этого подхода для заданного дифференциального уравнения ищут пару функций ξ, η в виде

$$\xi = 0, \eta = f(x)$$

и ему подобном, постепенно усложняя вид зависимости. При этом каждый раз удается проверить существование симметрий искомого вида у заданного дифференциального уравнения за конечное число действий.

Пример 1.4. Уравнение

$$x(y + 4)dy = (y^2 + 2y + 2x)dx,$$

имеющееся в справочнике Камке за №236, нельзя проинтегрировать в Maxima, но пакет DETools для Maple позволяет отыскать по Абаку несколько его симметрий, в том числе

$$\xi = x^2 + 4x, \quad \eta = x(y + 4).$$

Отправной точкой для отыскания симметрий по Абаку является та же идея, что и в алгоритме Мозеса: Мозес ищет множители вида $\mu = f(x)$ или $\mu = f(y)$, а Абак — инфинитезимальные операторы вида $\{\xi = 0, \eta = f(x)\}$ и т. д., что дает множители вида

$$\mu = \frac{1}{yf(x)}$$

и т. д. Отсюда, между прочим, хорошо видно, что успех применения Абака существенно зависит от выбора переменных x и y . В частности, этот метод, как и метод Мозеса, не инвариантен относительно сдвигов и поворотов на плоскости xy . Поэтому несложным алгебраическим преобразованием можно

из уравнения, интегрируемого силами Maple, получить такое, которое разрешить не удастся. В процессе тестирования DETools была обнаружена одна черта, общая для подавляющего большинства уравнений, собранных в справочнике Камке: 78 % из них, в том числе самые распространенные, имеют симметрии одного и того же вида:

$$\xi = f(x), \quad \eta = p(x)y + q(x). \quad (3)$$

Первооткрыватели назвали симметрии из этого класса линейными и указали алгоритм, позволяющий для заданного уравнения, отличного от уравнения Риккати, найти его линейную группу, если таковая существует [7]. Де-факто получилось, что для авторов XIX — нач. XX веков разрешимые в конечном виде дифференциальные уравнения — это уравнения, обладающие линейной симметрией. Разумеется, это свойство дифференциального уравнения разрушается несложными преобразованиями координат.

Подытоживая все сказанное, можно утверждать, пользователь современной CAS, желающий перебором подобрать простое дифференциальное уравнение, не осознавая этого, задает системе вопрос о том, какое из уравнений имеет линейную группу (3). При этом он выбросит как сложные даже дифференциальные уравнения, решение которых выражается в элементарных функциях, например, из-за того, что неудачно выбраны координаты.

1.5. Численные методы XVIII века и теория Галуа. Дифференциальная теория Галуа, пусть пока и с некоторым весьма существенными оговорками, позволяет вести перебор дифференциальных уравнений более осмысленно, отбрасывая только уравнения, не разрешимые в элементарных функциях.

В частности, на основе исследований Д. Д. Модухай-Болтовского и М. Зингера можно разработать алгоритмы, позволяющие выяснить, имеет ли данное уравнение 1-го порядка элементарный интеграл или интегрируется ли оно в квадратурах [13, 35]. Самой доступной из реализаций этих алгоритмов является Lsolver под Maple [8, 36]. Этот пакет может интегрировать некоторые дифференциальные уравнения, не доступные для Абака. Однако авторы пакета Lsolver не ставили перед собой цели написания пакета, который был бы в состоянии сказать, что то или иное дифференциальное уравнение не интегрируется в элементарных функциях. Некоторые уравнения, которые проинтегрировал бы даже Soldier Мозеса, оказываются для Lsolver слишком сложными. Например, Lsolver не может найти интегрирующий множитель для уравнения Бернулли

$$y' = y + \frac{x}{y},$$

общее решение которого дается в элементарных функциях.

Мы попытались восполнить этот недостаток в нашем пакете Lagutinski под Sage [9]. К сожалению, в реализованном нами алгоритме имеется слепая

зона. Пользователь должен указать верхнюю границу для степеней многочленов, входящих в элементарные интегралы. После чего система или дает интеграл, или сообщает, что такового нет. Для поставленной задачи отыскания простых дифференциальных уравнений эта слепая зона непринципиальна. Символьные выражения, содержащие многочлены больших степеней, вполне можно считать сложными. Вторым недостатком этого пакета следует называть его ресурсоемкость.

Практики относятся к возможностям теории Галуа весьма скептически по совсем другим причинам. Для примера приведем ответ на вопрос «Why is differential Galois theory not widely used?», данный на mathoverflow.net.

«Differential Galois theory is concerned with linear differential equations in one variable. Specialists in differential equations tend to care about more than that (e.g., PDE, nonlinear equations), and the aspect of solvability addressed by differential Galois theory is largely of no interest to them even for linear differential equations. Even ordinary Galois theory is not really of much importance to analysts needing roots of a polynomial in \mathbb{C} . Nobody really cares about being able write roots in a very restrictive form related to solvable Galois groups. It is mostly of historic interest.»

В самом деле, когда в конце XVIII века Рурффини доказал, что не всякое уравнение 5-й степени разрешимо в радикалах, это было важно. По таблицам логарифмов можно было вычислять радикалы приближенно, но не было способа искать прямо корни самого уравнения 5-й степени. В 1830-х гг. такой способ появился в работах Лобачевского и сейчас реализован в любой системе компьютерной алгебры общего назначения, поэтому всерьез говорить о том, что уравнение 5-й степени труднее уравнения 4-й степени, не приходится.

Когда в 1830-х гг. Лиувилль предложил способ, позволяющий, по крайней мере иногда, выяснить, что та или иная задача не решается в элементарных функциях, это было важно, поскольку в ходу были таблицы логарифмов. Дифференциальное уравнение, решение которого выражается при помощи элементарных функций, тогда казалось, безусловно, более простым, чем уравнение, в таком виде не разрешимое. Однако теперь список элементарных функций кажется историческим пережитком. В любой системе компьютерной алгебры этот список расширен специальными функциями, причем точность, достижимая в вычислении по крайней мере некоторых из них, не хуже, чем точность, с которой вычисляются функции элементарные. Расширение списка элементарных функций в теории Лиувилля и вообще в дифференциальной теории Галуа весьма затруднительно. Дело в том, что в ее основе лежит принцип Лиувилля, который использует тот факт, что e^x и $\ln x$ — решения линейных дифференциальных уравнений. В современном изложении [3] этот факт не так бросается в глаза, как в самой работе Лиувилля [10]. Поэтому многие

современные авторы полагают, что дифференциальная теория Галуа имеет в основном историческое значение.

Дифференциальная теория Галуа остается привязанной к вычислительной практике XVIII века и, вероятно, нет возможности преодолеть это затруднение. Для специалистов по математическому моделированию вопрос о том, интегрируется ли заданное дифференциальное уравнение именно в элементарных функциях, едва ли представляет интерес.

1.6. Численные методы решения дифференциальных уравнений. При всей приближительности такой периодизации, удобно поделить численные методы решения дифференциальных уравнений на три этапа:

- 1) интегрирование в элементарных функциях и квадратурах (XVIII век);
- 2) интегрирование при помощи всюду сходящихся степенных рядов (XIX век);
- 3) интегрирование по методу конечных разностей (XX век).

Эта периодизация существенно упрощает реальную картину. Разумеется, и Эйлеру, и Коши был известен метод конечных разностей, но оба названного автора предпочли ему метод, основанный на разложении в ряды.

Точно так же как первый этап породил теорию Галуа, второй породил в XIX веке аналитическую теорию дифференциальных уравнений. В этот период задачи, разрешимые во всюду сходящихся степенных рядах, стали восприниматься как те самые желанные разрешимые задачи. Однако это обстоятельство не было зафиксировано в виде новой теории Галуа. Вместо этого аналитики XIX века представляли свои исследования как теорию высших трансцендентных функций.

Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f \in \mathbb{C}[x, y], \quad (4)$$

решается в степенных рядах, которые сходятся лишь в окрестности начального значения x . Эти ряды можно принять за окончательное выражение решения начальной задачи лишь в тех редких случаях, когда эти ряды сходятся при всех x (т. е. являются целыми функциями x). Дифференциальные уравнения (4), общие решения которых можно разложить во всюду сходящийся ряд по степеням x , составляют простейший с этой точки зрения класс дифференциальных уравнений. Этот класс дифференциальных уравнений описывает теорема Реллиха.

Теорема 1.1 (Реллих, 1943 [11]). Если правая часть дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ является целой функцией своих аргументов, например, принадлежит $\mathbb{Q}[x, y]$, а всякое решение этого уравнения является целой функцией x , то f является линейной функцией y .

Таким образом, класс дифференциальных уравнений (4), решения которых представимы в виде сходящихся степенных рядов, совпадает с классом

линейных дифференциальных уравнений

$$y' = p + qy, \quad p, q \in \mathbb{C}[x]. \quad (5)$$

Всякое решение линейного дифференциального уравнения выражается в конечном виде при помощи квадратур и одной трансцендентной функции — экспоненты. Это наблюдение дает новое объяснение феномену элементарных функций. Среди дифференциальных уравнений 1-го порядка лишь линейные решаются в виде всюду сходящихся рядов. Табулировав решение одного из них, мы можем выразить решение любого другого при помощи квадратур. Исторически повелось, что было табулировано решение уравнения $y' = y$, т. е. $\exp(x)$.

Следующий по сложности класс образуют те дифференциальные уравнения вида (4), общее решение которых можно представить в виде отношения всюду сходящихся рядов по степеням x , т. е. являющиеся мероморфными функциями x . Все особые точки решения такого уравнения являются полюсами, теперь это свойство дифференциального уравнения называют свойством Пенлеве [12, 13]. Этот класс описывает теорема Фукса.

Теорема 1.2 (Л. Фукс [12]). Если решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с рациональной правой частью имеют в качестве подвижных особых точек только полюса (свойство Пенлеве), то его правая часть f является квадратичной функцией y .

Класс дифференциальных уравнений вида (4), решения которых можно представить в виде отношения всюду сходящихся степенных рядов, в точности совпадает с классом уравнений Риккати

$$y' = py^2 + qy + r, \quad p, q, r \in \mathbb{C}[x]. \quad (6)$$

Согласно теореме Лиувилля решение далеко не любого уравнения Риккати можно представить в конечном виде при помощи экспонент и квадратур [14, 15], например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x^n + y^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

решение которого дается в виде отношения цилиндрических функций. Возникающие на этом пути новые трансцендентные функции получили название высших трансцендентных функций или специальных функций, в т. ч. цилиндрических, гипергеометрических и т. д. Известной заменой уравнение Риккати можно свести к линейному уравнению 2-го порядка, поэтому обычно классификацию этих трансцендентных функций проводят с точки зрения линейных уравнений 2-го порядка.

В настоящее время разработаны методы, позволяющие выяснить за конечное число шагов, можно ли представить решение заданного дифференциального уравнения в конечном виде при помощи экспонент и квадратур [15],

а также методы сведения решения уравнения Риккати к известным трансцендентным функциям. Следует, однако, заметить, что не всякое уравнение Риккати интегрируется в известных специальных функциях, поэтому системы компьютерной алгебры общего назначения часто рассматривают такие дифференциальные уравнения как неразрешимые в символьном виде. Например, ни Maple, ни WolframAlpha ничего не могут сказать про символьное решение уравнения

$$y' = 1 + x^3 + y^2,$$

хотя его решение представляется в виде отношения двух всюду сходящихся рядов.

Естественного расширения класса дифференциальных уравнений, общие решения которых можно представить в виде отношения всюду сходящихся рядов по степеням x , предложено не было. Вместо этого были изучены уравнения 2-го порядка и уравнения, не разрешенные относительно производной, решения которых можно представить в виде отношения всюду сходящихся рядов по степеням x . В первом случае на этом пути возникли трансценденты Пенлеве, во втором — эллиптические функции.

В начале XX века предпринимались значительные усилия для того, чтобы трансцендентные Пенлеве вошли в арсенал вычислителей. Однако конкурсы, направленные на активизацию разработки численных инструментов для работы с этими новыми трансцендентными функциями, непременно уходили в чисто теоретическую область [16]. Ситуация едва ли изменилась: для вычисления трансцендентных Пенлеве, NIST Digital Library of Mathematical Functions [17], § 32.17, предлагают использовать метод Рунге–Кутты. Но для применения метода конечных разностей, вообще говоря, не важно, можно представить решение в виде отношения всюду сходящихся рядов или нет.

1.7. Дифференциальная теория Галуа и конечные разности. На наш взгляд, критики теории Галуа сделали верное наблюдение: теория Галуа, равно как и любая теория разрешимости в конечном виде тех или иных задач, зависит от численных методов своей эпохи. В XVII веке дифференциальные уравнения пытались решить при помощи рациональных функций, и тогда появилась задача Дебона об интегрировании дифференциального уравнения в алгебраических функциях, во времена Лиувилля — при помощи элементарных функций, во времена Пенлеве — при помощи разложений в степенные ряды, теперь же мы решаем их приближенно методом конечных разностей. В этом плане весьма показательным, что трансцендентные Пенлеве теперь рекомендуют вычислять по методу Рунге–Кутты.

Версии теории Галуа нельзя использовать для открытия вечных законов мироздания, как того хотели авторы XIX века, абсолютизируя тот или иной список элементарных функций, или более общо, численные методы своей эпохи, но вполне можно использовать для отыскания моделей, наи-

более удобных в рамках современных численных методов. Иными словами, при создании математических моделей следует учитывать их вычислительную сложность не вообще, а в рамках конкретных численных методов. Несмотря на бурный рост вычислительных возможностей, пришедшийся на начало XXI века подход к интегрированию дифференциальных уравнений остается вполне устоявшимся: основными для решения дифференциальных уравнений остаются разностные методы. Поэтому для нужд математического моделирования достаточно приспособить теорию Галуа к методу конечных разностей решения дифференциальных уравнений.

Против такой постановки вопроса можно возразить. Не всякое дифференциальное уравнение разрешимо в элементарных функциях, что позволяет исследовать вопрос о разрешимости заданного дифференциального уравнения в элементарных функциях, но всякое дифференциальное уравнение решается по методу конечных разностей. Поэтому вопрос о разрешимости дифференциальных уравнений в конечных разностях лишен смысла. Однако сказанное верно лишь с той оговоркой, что решение не имеет на рассматриваемом интервале особых точек.

Хорошо известно, что метод конечных разностей аппроксимирует решение дифференциального уравнения тем хуже, чем ближе мы подходим к особой точке. Это наблюдение, подкрепленное авторитетом Эйлера, долгое время препятствовало соединению численных и аналитических методов решения дифференциальных уравнений. То обстоятельство, что подвижные, т.е. зависящие от начальных данных, особые точки являются алгебраическими, было установлено Пенлеве в 1890-х гг. Однако задача определения положения и порядка подвижной особенности по нескольким приближенным решениям, найденным по методу конечных разностей, была сформулирована Г. И. Марчуком лишь в 2000-х гг. В настоящее время в нашем распоряжении имеется практический способ, позволяющий оценить положение и порядок подвижных алгебраической особенности, см. п. 2.3.

Это обстоятельство наводит на мысль, что по крайней мере для некоторых классов дифференциальных уравнений можно составить разностные схемы, верно описывающие поведение решения не только до подвижной особой точки, но и после нее. В следующих главах мы построим такие схемы для некоторых классов дифференциальных уравнений.

1.8. Теория классических трансцендентных функций в работах Пенлеве. Интегрирование дифференциального уравнения 1-го порядка, пусть даже и не разрешенного относительно производной, скажем,

$$F(x, y, y') = 0, \quad F \in \mathbb{C}[x, y, z],$$

вводит одну константу интегрирования, т.е. его общее решение является функцией x и константы C . На самом деле, название «константа» вводит

в заблуждение: при дифференцировании общего решения по x величину C , конечно, считают постоянной, но ничто не препятствует тому, чтобы далее рассматривать общее решение как функцию «постоянной» C , а «переменную» x , напротив, зафиксировать.

Теорема 1.3 (Пенлеве [18,22]). Если общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0, \quad F \in \mathbb{Q}[x, y, z],$$

зависит от константы алгебраически, то это уравнение алгебраической же подстановкой сводится или к уравнению Риккати

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad (8)$$

или к уравнению вида

$$y'^2 = p(x)(y^3 + g_1y + g_2). \quad (9)$$

Замечание 1.1. Идея изменить роль переменных и постоянных величин в теории дифференциальных уравнений появилась удивительно поздно, примерно в 1890-х годах в работах Пенлеве [18, 22] и Ли [19, гл. 24]. Между тем, элементарные методы интегрирования дифференциальных уравнений могут быть классифицированы очень просто по зависимости от константы, но не по зависимости от x . Такой подход описан в нашем пособии по дифференциальным уравнениям [21].

Замечание 1.2. Теоремы в [18,22] были сформулированы слишком общо, из-за чего в доказательствах были лакуны, заполненные в [37], здесь приведены только упрощенные формулировки.

Интегрирование уравнения Риккати (8) естественным образом сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения 2-го порядка, а интегрирование этого уравнение естественно приводит к гипергеометрическим рядам, цилиндрическим функциям и прочим высшим трансцендентным функциям. Интегрирование уравнения (9) приводит к эллиптическим функциям. Именно эти, и только эти функции и были предметом многочисленных исследований математиков XVIII–XIX веков, и поэтому Пенлеве предложил считать, трансцендентные функции, возникающие при интегрировании дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от констант алгебраически, *классическими трансцендентными функциями*.

В конце XIX века это определение было увязано с вычислительной практикой XIX века, согласно которой уравнения (8) и (9) были проще других

уравнений 1-го порядка тем, что они обладали свойством Пенлеве, т. е. любое их частное решение можно представить в виде отношения двух всюду сходящихся рядов по степеням x .

Эти результаты можно обобщить на дифференциальные уравнения высших порядков. Для краткости мы примем следующую терминологию:

- свойство Пенлеве, которое имеется у дифференциального уравнения, все подвижные особые точки решений являются полюсами;
- двойственное свойство Пенлеве, которое имеется у дифференциального уравнения, общее решение которого зависит от констант интегрирования алгебраическим образом.

Свойство Пенлеве — аналитическое и оно очевидно важно для вычисления решения при помощи степенных рядов. Двойственное свойство Пенлеве — алгебраическое, им обладают дифференциальные уравнения, разрешимые в классических трансцендентных функциях.

В классе дифференциальных уравнений 1-го порядка соответствие между этими свойствами следующее: если дифференциальное уравнение обладает двойственным свойством Пенлеве, то оно алгебраической подстановкой сводится к дифференциальному уравнению, обладающему свойством Пенлеве. В этом классе верно и обратное, всякое дифференциальное уравнение 1-го порядка, обладающее свойством Пенлеве, обладает и двойственным свойством Пенлеве.

Однако в классе дифференциальных уравнений второго порядка верным остается лишь первое утверждение: если дифференциальное уравнение обладает двойственным свойством Пенлеве, то оно алгебраической подстановкой сводится к дифференциальному уравнению, обладающему свойством Пенлеве. Однако не всякое уравнение, обладающее свойством Пенлеве, обладает и двойственным свойством Пенлеве. Например, общее решение уравнения

$$y'' + 3y^2 - \frac{x}{2} = 0$$

является трансцендентной функцией констант, и в то же время его можно представить в виде отношения всюду сходящихся рядов по степеням x [23, теорема 2.5]. По мнению Пенлеве, отсюда следовало, что частные решения этого уравнения — новые трансцендентные функции. Однако представители школы Весио, развившие теорию Лиувилля, справедливо заметили, что такое представление о классических трансцендентных функциях существенно отличается от представления Лиувилля, и поэтому аргумент Пенлеве нельзя использовать даже для доказательства неэлементарности этих функций [24].

К сожалению, они не заметили, что Пенлеве предложил новую версию теории Галуа, в которой не фиксирован заранее класс трансцендентных функций. В наших работах [25, 26] такая версия теории Галуа была представлена. В частности, было показано, что принцип Лиувилля, после некоторых моди-

фикаций, играет в этой теории ту же центральную роль, что и в классических построениях Лиувилля. Первоначально мы хотели построить теорию Галуа, в которой бы не был фиксирован список элементарных операций.

Желая проиллюстрировать эту новую версию теории Галуа вычислительными примерами, мы применили метод конечных разностей и случайно обнаружили, что ее изложение только выигрывает в простоте, если рассматривать ее не с точки зрения степенных рядов, а с точки зрения метода конечных разностей. Дело в том, что двойственное свойство Пенлеве — чисто алгебраическое, и оно легко переносится на разностные схемы, которые задают алгебраическое соответствие между слоями. Мы докажем, что это свойство очень естественно описывается на языке разностных схем и оно является достаточным для того, чтобы счет по разностной схеме можно было продолжить через подвижные особые точки. Таким образом, существование у дифференциального уравнения такой схемы мы можем рассматривать как разностный аналог обладания свойством Пенлеве.

2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

2.1. Разностные схемы. Здесь и далее ограничим рассмотрение дифференциальным уравнением вида

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{Q}(x, y). \quad (10)$$

Простейший и в то же время самый употребительный метод приближенного решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=a} = y_0 \quad (11)$$

на отрезке $a < x < b$ — метод конечных разностей. Для удобства дальнейших ссылок дадим ему краткое описание.

По методу конечных разностей отрезок $a < x < b$ разбивают на части

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

и принимают, что переход с n -го слоя на следующий происходит по формуле, в том или ином смысле аппроксимирующей исходно дифференциальное уравнение. Например, вслед за Эйлером принимают

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = f(x_n, y_n).$$

Величину $x_{n+1} - x_n$ называют шагом, и если он не меняется от слоя к слою, его обозначают как Δx . Переход от слоя к слою осуществляется по одной и

той же формуле, именуемой *разностной схемой*. Индексы, соответствующие n -му слою, опускают, а вместо индексов, соответствующих следующему слою, пишут шляпку над буквой. Например, явную схему Эйлера записывают так:

$$\hat{y} - y = f(x, y)\Delta x. \quad (12)$$

В общем же случае схему можно записать как

$$G(x, \hat{x}, y, \hat{y}) = 0. \quad (13)$$

Будем далее предполагать, что G — многочлен относительно всех своих аргументов с целыми коэффициентами, который удовлетворяет равенству

$$G(x, x, y, y) = 0 \quad (14)$$

тождественно.

Замечание 2.1. Термины «разностная схема» в численных методах и «проективная схема» в алгебраической геометрии являются в равной мере устоявшимися, поэтому мы далее всегда будем сохранять прилагательное «разностная» во избежание двусмысленности.

2.2. Аппроксимация дифференциального уравнения разностной схемой. Говоря об аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой, обычно имеют в виду, что при $\Delta x \rightarrow 0$ разностное уравнение (13) в некотором смысле превращается в дифференциальное уравнение (11). Этим путем понятие аппроксимации вводится во всех руководствах, начиная с классической монографии В. С. Рябенского и А. Ф. Филиппова [27, с. 23]. Приспособить общее определение к нашему случаю можно, например, так: аппроксимация означает, что для любой функций u из некоторого метрического пространства верно

$$\|G(x, x + \Delta x, u(x), u(x + \Delta x))\Delta x^k - u'(x) + f(x, u(x))\| \rightarrow 0$$

при надлежащем выборе показателя k . Иными словами, при таком подходе принимают, что многочлен G с точностью до некоторой степени Δx совпадает с исходным дифференциальным уравнением. При изучении линейных дифференциальных уравнений это удобно, однако в нелинейной теории удобно будет писать дифференциальное уравнение в виде $pdx + qdy = 0$, который принципиально определен лишь с точностью до множителя. Поэтому мы введем понятие аппроксимации дифференциального уравнения, воспользовавшись подготовительной теоремой Вейерштрасса следующим образом.

Зафиксируем на плоскости xy произвольную точку (\bar{x}, \bar{y}) , в которой производная

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{y}}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) \neq 0.$$

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса уравнение

$$G(\bar{x}, \bar{x} + \Delta x, \bar{y}, \hat{y}) = 0$$

относительно \hat{y} имеет единственное непрерывное решение, принимающее значение $\hat{y} = \bar{y}$ при $\Delta x = 0$. Это решение можно разложить в ряд по степеням Δx :

$$\hat{y} = \bar{y} + g_1(\bar{x}, \bar{y})\Delta x + g_2(\bar{x}, \bar{y})\Delta x^2 + \dots$$

В силу теоремы Коши решение начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=\bar{x}} = \bar{y}$$

можно разложить в ряд того же вида

$$y = \bar{y} + f(\bar{x}, \bar{y})\Delta x + f_2(\bar{x}, \bar{y})\Delta x^2 + \dots$$

Определение 2.1. Будем говорить, что схема (13) *аппроксимирует* исходное уравнение, если совпадают первые члены этих рядов при любом допустимом выборе значений (\bar{x}, \bar{y}) . Иными словами, если

$$g_1(x, y) = f(x, y).$$

Если же совпадают все члены до s -го порядка, будем говорить, что схема аппроксимирует дифференциальное уравнение с s -м порядком.

Если вообразить множество всех разностных схем вида (13) и множество всех дифференциальных уравнений вида (10), то схемы, аппроксимирующие одно и то же уравнение, можно отнести к одному классу и тем самым задать разбиение множества всех разностных схем на непересекающиеся классы.

Теорема 1.4. Разностная схема (13) аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y],$$

в том и только в том случае, когда разложение многочлена G по степеням Δx и Δy имеет вид

$$G(x, x + \Delta x, y, y + \Delta y) = \mu(x, y) \cdot (p(x, y)\Delta x + q(x, y)\Delta y) + \dots,$$

где μ — некоторый многочлен из $\mathbb{Q}[x, y]$.

Многочлен μ является разностным аналогом интегрирующего множителя.

Доказательство. Вообще говоря, разложение имеет вид

$$G(x, x + \Delta x, y, y + \Delta y) = G_0(x, y) + G_1(x, y)\Delta x + G_2(x, y)\Delta y + \dots$$

Но здесь

$$G_0(x, y) = G(x, x, y) = 0$$

в силу (14). Выражая Δy через Δx из уравнения

$$G_1(x, y)\Delta x + G_2(x, y)\Delta y + \dots = 0,$$

получим

$$\Delta y = -\frac{G_1(x, y)}{G_2(x, y)}\Delta x + \dots$$

Схема (13) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение в том и только в том случае, когда

$$\Delta y = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}\Delta x + \dots$$

Условие

$$\frac{G_1(x, y)}{G_2(x, y)} = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

эквивалентно ему. □

Если решение задачи Коши не встречает особых точек, то его можно найти по любой схеме, аппроксимирующей исходное дифференциальное уравнение. Для удобства ссылок сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 2.2. Пусть $f \in \mathbb{Q}(x, y)$ и схема (13) аппроксимирует дифференциальное уравнение с порядком s . Если точное решение $y = g(x)$ задачи Коши (11) на отрезке $a \leq x \leq b$ не имеет особых точек, то найдутся две такие константы M_x и M_y , что приближенное решение y_1, \dots, y_N той же задачи Коши будет удовлетворять оценке

$$|y_n - g(x_n)| \leq M_y \Delta x^s,$$

лишь только шаг удовлетворяет условию $\Delta x \leq M_x$.

Обычно для популярных разностных схем стремятся получить явные оценки для констант [28], поэтому затруднительно указать источник, в котором это утверждение было бы доказано в общем случае.

2.3. Подвижные особые точки. В случае нелинейного уравнения нет никаких оснований полагать, что при заданных начальных условиях точное решение не имеет особых точек на отрезке $a \leq x \leq b$.

Напомним, что в отличие от линейных дифференциальных уравнений решения нелинейных уравнений могут иметь особые точки, положение которых на оси x зависит от выбора начальных данных, такие особые точки в аналитической теории дифференциальных уравнений называют подвижными.

Теорема 2.3 (Пенлеве [29]). В окрестности подвижной особой точки $x = c$ решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{C}(x, y),$$

можно разложить в ряд по целым степеням параметра $u = \sqrt[r]{x - c}$, $r \in \mathbb{N}$, причем число сингулярных членов в этом ряде не более чем конечно.

Ряды, возникшие в теореме Пенлеве, называют рядами Пуизё, а особые точки, в окрестности которых функцию можно разложить в такой ряд, — *алгебраическими особыми точками*. Упорядочив слагаемые ряда по возрастанию степени, можно написать

$$y = c_0(x - c)^s + \dots, \quad s \in \mathbb{Q}.$$

Появившийся здесь наименьший показатель s называют порядком алгебраической особой точки.

Появление на рассматриваемом отрезке подвижной особой точки делает невозможным применение метода Эйлера в ее окрестности. А. Н. Крылов в своих лекциях [38] по этому поводу приводил прямую цитату Эйлера.

«Погрешность при этом вычислении происходит от того, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y являются сохраняющими свои значения, соответствующие началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.»

На протяжении веков отсюда делался вывод о невозможности описания поведения решения в окрестности особой точки по методу конечных разностей, а задача определения положения и порядка подвижной особенности по нескольким приближенным решениям, найденным по методу конечных разностей, была сформулирована Г. И. Марчуком лишь 2000-х гг.

Задача 2.1. По нескольким приближенным решениям задачи Коши определить положение подвижной особой точки и ее порядок.

В середине 2000-х было предложено практическое решение этой задачи [39, 40]. Оказалось, что способ Ричардсона, традиционно использующийся для оценки порядка сходимости схемы, в случае схемы CROS дает решение поставленной задачи: до особой точки эффективный порядок дает порядок аппроксимации, а после нее — порядок подвижной точки. Оставляя в стороне вопросы обоснования этого метода, приведем пример.

Пример 2.1. График эффективного порядка решения задачи Коши для уравнения Риккати

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \quad (15)$$

на отрезке $0 < x < 2$ по схеме CROS представлен на рис. 1. Хорошо видно, что особая точка лежит где-то у $x = 2$ и имеет порядок $s = -1$. Дифференциальное уравнение $y' = x^2 + y^2$ интегрируется в цилиндрических функциях

$$y = -\frac{x \left(J_{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) - Y_{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \right)}{J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) - Y_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right)},$$

поэтому в справедливости сказанного нетрудно убедиться прямой проверкой. Когда точное решение уходит на бесконечность, приближенное решение, найденное по схеме CROS, выходит на постоянное значение.

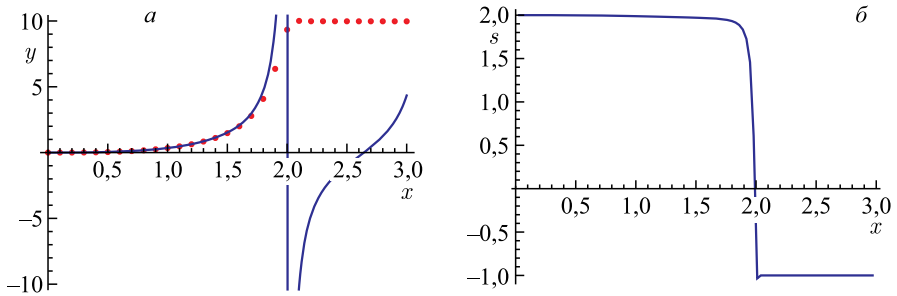


Рис. 1. *а)* Точное и приближенное решения начальной задачи из примера 2.1 (точками отмечено приближенное решение) и *б)* эффективный порядок ее приближенного решения

В процитированном выше пассаже Эйлер видел невыгодное обстоятельство в самом методе конечных разностей, однако в действительности изъян был только в выборе разностной схемы. Рассмотренные примеры указывают, что метод конечных разностей может быть употреблен для анализа особенностей. Посмотрим теперь особо, что дает метод конечных разностей для уравнения Риккати.

3. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ И КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

Уравнение Риккати (6) стало первым уравнением, которое не удалось проинтегрировать в элементарных функциях, поэтому именно оно стало объектом численных экспериментов. В частности, свои суждения о разностных схемах Эйлер иллюстрировал примерами на уравнение Риккати.

3.1. Схема, вычисления по которой можно продолжить за подвижные особые точки. Схема CROS позволяет оценить положение особой точки и ее порядок, однако поведение решения в непосредственной близости к особой точке, и тем более за ней, она описывает неправильно, что хорошо видно на рис. 1. Однако для уравнения Риккати нетрудно построить разностную схему, верно описывающую решение и после особой точки. Вот эта схема:

$$\hat{y} = y + (py\hat{y} + qy + r)\Delta x, \quad (16)$$

где p, q, r берутся, для определенности, в слое x . Линейность схемы относительно \hat{y} позволяет переходить со слоя на слой по явным формулам, а порядок аппроксимации дифференциального уравнения равен единице, поэтому результаты вычислений по этой схеме не должны быть менее точными, чем вычисления по явной схеме Эйлера (12). Удивительное же свойство схемы (16) состоит в том, что счет по ней можно продолжить за особые точки решения без заметного накопления ошибки.

Замечание 3.1. Мы обнаружили названное свойство схемы (16) случайно, пытаясь разобраться с тем, что дает наша версия теории Галуа [25] для теории разностных схем [30].

Пример 3.1. Точное решение $y = \tan x$ начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \quad (17)$$

имеет полюса в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, приближенное решение этой задачи представлено на рис. 2, счет по линейной схеме переходит через два полюса $x = \pi$ и $x = 3\pi$ без заметного накопления ошибки. Точное решение задачи (15) может быть выражено через функции Бесселя, на рис. 3 можно сравнить это решение с приближенным. Хорошо видно, что и здесь удается перешагнуть через три полюса, однако ближе к правому краю заметно небольшое расхождение точного и приближенного решения.

Таким образом, численные эксперименты указывают на то, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть $p, q, r \in \mathbb{Q}(x)$ и не имеют полюсов на отрезке $a \leq x \leq b$ и пусть $y = g(x)$ — точное решение задачи Коши (11) для уравнения Риккати на этом отрезке. Для любого $\delta > 0$ найдутся две такие константы M_x и M_y , что приближенное решение y_1, \dots, y_N той же задачи Коши, найденное по схеме (16), удовлетворит оценке

$$|y_n - g(x_n)| \leq M_y \Delta x$$

во всех точках x_n , отделенных от полюсов точного решения на расстояние, большее δ , лишь только шаг удовлетворяет условию $\Delta x \leq M_x$.

Доказательству теоремы (см. п. 3.3) необходимо предположить исследование чисто алгебраических свойств схемы (16).

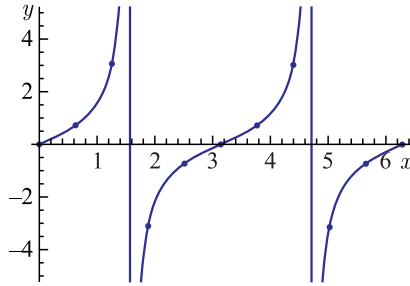


Рис. 2. Решение начальной задачи (17), точное (сплошная линия) и найденное по линейной схеме с сотней слоев (отмечена каждая 10-я точка)

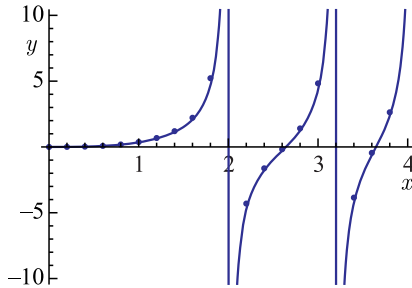


Рис. 3. Решение начальной задачи (7), точное (сплошная линия) и найденное по линейной схеме с сотней слоев (отмечена каждая 5-я точка)

3.2. Алгебраические свойства схемы. Схема (16) представляет собой линейное уравнение относительно y и \hat{y} , причем выражение \hat{y} через y и y через \hat{y} является дробно-линейным. В дальнейшем удобно принять, что соотношение (16) задает взаимно-однозначное соответствие между двумя соседними слоями. Чтобы сказанное было верно во всех точках, необходимо дополнить область значений переменных y и \hat{y} бесконечно удаленными точками и принять обычном образом, что точке $y = 1/p$ отвечает $\hat{y} = \infty$. Это означает, что слои для уравнения Риккати естественно считать проективными прямыми.

На самом деле при задании любой разностной схемы (13) следовало бы указывать области изменения переменных y и \hat{y} , иными словами, явно указывать, какие именно многообразия рассматриваются в качестве слоев, а саму схему рассматривать как алгебраическое соответствие между слоями.

Замечание 3.2. Напомним, что соответствие между двумя многообразиями V и \hat{V} называется алгебраическим (n, m) -соответствием, если оно задается алгебраическими уравнениями, и, вообще говоря, одной произвольной точке V отвечает n различных точек \hat{V} , а одной произвольной точке \hat{V} — m различных точек V [26, 31].

Сравним с этих позиций нашу схему (16) со схемой Эйлера, ограничившись классом дифференциальных уравнений Риккати.

Счет по явной схеме Эйлера

$$\hat{y} = y + (p(x) + q(x)y + r(x)y^2)\Delta x$$

не может дать бесконечно большого значения для y_n , поэтому естественно принять, что слои — аффинные прямые. В таком случае явная схема Эйлера задает алгебраическое соответствие между слоями, причем одной точке на первом слое отвечает одна точка на втором, а одной точке со второго слоя две точки с первого (в предположении, что узлы x_n используемой сетки не попадают в нули коэффициента r). Таким образом, явная схема Эйлера задает $(1, 2)$ -соответствие между соседними слоями. При вычислении по явной схеме пользуются тем, что по заданному значению y_0 на начальном слое можно найти одно единственное значение y_N на конечном слое, и игнорируют то несущественное для вычисления приближенного решения обстоятельство, что заданному y_N отвечает два значения y_{N-1} , каждому из них два значения y_{N-1} и т.д. Поэтому явная схема Эйлера задает $(1, 2^N)$ -соответствие между начальным и конечным $(N-м)$ слоями.

Счет по нашей схеме

$$\hat{y} = y + (p(x) + q(x)y + r(x)y\hat{y})\Delta x$$

может дать бесконечно большие значения для y_n , поэтому мы приняли, что слои — проективные прямые. Эта схема задает взаимно-однозначное соответствие между соседними слоями, а следовательно, и между любыми слоями.

Рассмотрим теперь с тех же позиций начальную задачу. Традиционно решение начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, \quad y(a) = y_0,$$

рассматривают как функцию x , а y_0 считают постоянной величиной, заданной произвольным образом. Однако ничто не мешает фиксировать конечное значение x , скажем $x = b$, и рассмотреть решение как функцию y_0 . В случае уравнения Риккати эта зависимость очень простая: точное решение является дробно-линейной функцией начального значения y_0 , т. е.

$$y = \frac{\alpha(x)y_0 + \beta(x)}{\gamma(x)y_0 + \delta(x)}. \quad (18)$$

Зафиксируем какой-либо конечный момент $x = x_1$ и обозначим значение решения в этот момент как y_1 . Тогда

$$y_1 = \frac{\alpha(x_1)y_0 + \beta(x_1)}{\gamma(x_1)y_0 + \delta(x_1)}.$$

Если принять, что переменные y_0 и y_1 принимают значения на проективных прямых, то эта формула задает проективное соответствие между этими прямыми. Иными словами, начальная задача для уравнения Риккати задает взаимно-однозначное соответствие между начальным и конечным слоями.

Отсюда получается, что при применении явной схемы мы аппроксимируем взаимно-однозначное соответствие между слоями $(1, 2^N)$ -соответствием. По существу мы пытаемся аппроксимировать однозначную функцию 2^N -значной и надеемся на то, что с увеличением N на рассматриваемом отрезке одна будет близка к другой. Удивительно здесь лишь то, что мы все же добиваемся в этом направлении известных успехов. Неявная схема Эйлера с этой точки зрения ничем не лучше явной: она задает $(2^N, 1)$ -соответствие между начальным и конечным слоями. Наша же схема задает взаимно-однозначное соответствие между слоями как и точное решение задачи Коши. Отсюда можно сделать важное для дальнейшего предположение: *для правильного описания поведения решения в окрестности особой точки по методу конечных разностей важно не только, чтобы схема аппроксимировала дифференциальное уравнение в смысле определения 2.1, но и сохраняла однозначность алгебраического соответствия между слоями.*

3.3. Доказательство теоремы 3.1. Обратимся теперь к доказательству теоремы 3.1. Неподвижные особые точки решения уравнения Риккати суть особенности коэффициентов p, q, r , по условию теоремы таковых на рассматриваемом отрезке не имеется. Подвижные особые точки решения — полюса, поэтому на рассматриваемом отрезке имеется не более чем конечное число таковых. Если полюсов на отрезке не имеется вовсе, то утверждение теоремы сразу следует из теоремы 2.2. Допустим, что множество это не пусто.

(i) Найдется бесконечно много таких значений числа y_0 , при которых решение начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = p + qy + ry^2, \quad y|_{x=a} = y_0,$$

не имеет полюсов на отрезке $a \leq x \leq b$.

Для доказательства заметим, что выражение (18) дает общее решение этой задачи, причем, не ограничивая общности рассмотрения, можно считать, что коэффициенты α, \dots, δ принимают на рассматриваемом отрезке вещественные значения и не имеют особенностей. В таком случае множество начальных значений, при которых решение начальной задачи имеет полюс на отрезке $[a, b]$, представляет собой множество корней линейного уравнения

$$\gamma(x)y_0 + \delta(x) = 0$$

с параметром x , меняющимся от a до b по вещественной оси. Это множество — чисто вещественное, поэтому при всех мнимых y_0 начальная задача не имеет особенностей на рассматриваемом интервале.

Замечание 3.3. Утверждение, подобное (i), хорошо известно в теории задачи многих тел [32] как теорема Вейерштрасса. Обычно она формулируется в том смысле, что при произвольных начальных данных соударение двух тел невероятно. В частности, утверждение (i) можно распространить на любые дифференциальные уравнения вида

$$F(x, y, y') = 0, \quad F \in \mathbb{Z}[x, y, z].$$

Для доказательства следует использовать стандартную для доказательства теоремы Вейерштрасса аргументацию, воспользовавшись вместо теоремы Зундмана теоремой Пенлеве об алгебраичности подвижной точки. Это утверждение мы будем далее называть принципом Вейерштрасса.

В частности, всегда найдутся такие три мнимых числа y'_0, y''_0, y'''_0 , что решение начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = p + qy + ry^2, \quad y|_{x=a} = y_0^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (19)$$

не имеет полюсов на отрезке $a \leq x \leq b$. Обозначим как $g'(x), g''(x), g'''(x)$ точные решения этих задач, а как y'_n, y''_n, y'''_n — приближенных решения этих задач, найденные по схеме (16). Тогда в силу теоремы 2.2 найдутся две такие константы M_x и M_y , что

$$|y_n^{(m)} - g^{(m)}(x_n)| \leq M_y \Delta x, \quad (20)$$

лишь только шаг удовлетворяет условию $\Delta x \leq M_x$.

(ii) Всякое (1,1)-соответствие между проективными прямыми является дробно-линейным, а всякое дробно-линейное преобразование сохраняет ангармоническое отношение четырех точек

$$(y, y', y'', y''') = \frac{y - y''}{y'' - y'} : \frac{y - y'''}{y''' - y'}.$$

Если y_n, y'_n, y''_n, y'''_n — четыре приближенных решения задачи Коши с различными начальными условиями на левом конце $x = a$, то их ангармоническое отношение

$$(y_n, y'_n, y''_n, y'''_n)$$

не зависит от n , т. е.

$$(y_n, y'_n, y''_n, y'''_n) = (y_0, y'_0, y''_0, y'''_0). \quad (21)$$

Аналогичное свойство имеется и у точного решения: для ангармонического отношения четырех точных решений уравнения Риккати верно

$$(g(x), g'(x), g''(x), g'''(x)) = (y_0, y'_0, y''_0, y'''_0). \quad (22)$$

Равенства (21) и (22) справедливы при всех x и всех n . В соответствии с обычными для проективной геометрии соглашениями можно считать, что это равенство сохраняется даже при тех значениях x , при которых $g(x)$ обращается в бесконечность, и тех значениях n , при которых y_n обращается в бесконечность.

(iii) Исходное точное решение можно выразить через три других точных решения по тем же формулам, что и приближенное решение через три приближенных решения. Более развернуто, пусть η', η'', η''' — новые символьные переменные, тогда существует такая рациональная функция φ этих переменных, что одновременно верно

$$g(x) = \varphi(g'(x), g''(x), g'''(x))$$

и

$$y_n = \varphi(y'_n, y''_n, y'''_n).$$

В самом деле, рассмотрим равенство

$$(y, \eta', \eta'', \eta''') = (y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$$

как уравнение относительно y , левая его часть является дробно-линейной функцией y , поэтому его корень выражается рационально через η', η'', η''' , т. е.

$$y = \varphi(\eta', \eta'', \eta'''),$$

где φ — рациональная функция с комплексными коэффициентами. Решая уравнение (22) относительно $g(x)$, получим

$$g(x) = \varphi(g'(x), g''(x), g'''(x));$$

аналогично, решая уравнение (21) относительно y_n , получим

$$y_n = \varphi(y'_n, y''_n, y'''_n).$$

(iv) После этой подготовки можно доказать утверждение теоремы 3.1. По теореме Лагранжа

$$g(x_n) - y_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta'} \cdot (g'(x_n) - y'_n) + \dots,$$

где производные вычисляются в точке, лежащей где-то на отрезке, соединяющем точку (y'_n, y''_n, y'''_n) с точкой $(g'(x_n), g''(x_n), g'''(x_n))$. В силу (20) эта точка лежит в области

$$|\eta^{(m)} - g^{(m)}(x_n)| \leq M_y \Delta x, \quad m = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Исключим теперь из рассмотрения δ -окрестности полюсов точного решения $y = g(x)$ исходной задачи Коши. Тогда знаменатель функции

$$\varphi(\eta', \eta'', \eta''')$$

не обращается в нуль на кривой

$$\eta' = g'(x), \dots, \eta''' = g'''(x), \quad x = a \dots b.$$

Поэтому для достаточно малой окрестности этой кривой можно подобрать такую константу L , что

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \eta^{(m)}} \right| \leq L, \quad m = 1, 2, 3.$$

Уменьшением при необходимости M_x можно добиться того, чтобы область (23) целиком попала в эту окрестность. Тогда

$$|g(x_n) - y_n| \leq 3LM_y \Delta x,$$

что, с точностью до переобозначения констант, утверждает теорема 3.1.

3.4. Проективные координаты и сведение уравнения Риккати к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка. Запишем проективное соответствие между слоями

$$\hat{y} = y + (p + qy + ry\hat{y})\Delta x,$$

теперь явно

$$\hat{y} = \frac{(1 + q\Delta x)y + p\Delta x}{1 - r\Delta xy}.$$

Композицию нескольких таких преобразований, описывающую переход с n -го слоя, скажем, на $(n+2)$ -й, удобно описывать в проективных координатах. Положим

$$y_n = u_n : v_n,$$

тогда

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{(1 + q_n \Delta x)u_n + p_n \Delta x v_n}{v_n - r_n \Delta x u_n},$$

или в матричных обозначениях

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_n & p_n \\ -r_n & 0 \end{pmatrix} \Delta x \right) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ v_{n+2} \end{pmatrix} = \left(E + \begin{pmatrix} q_{n+1} & p_{n+1} \\ -r_{n+1} & 0 \end{pmatrix} \Delta x \right) \left(E + \begin{pmatrix} q_n & p_n \\ -r_n & 0 \end{pmatrix} \Delta x \right) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

В частности, мы можем выразить решение на конечном слое через известное значение решения на начальном слое:

$$\begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \left(E + \begin{pmatrix} q_{N-1} & p_{N-1} \\ -r_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \Delta x \right) \cdots \left(E + \begin{pmatrix} q_0 & p_0 \\ -r_0 & 0 \end{pmatrix} \Delta x \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В пределе при $N \rightarrow \infty$ произведение матриц дает Р-интеграл Шлезингера [33, 34], поэтому

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \left(E + \begin{pmatrix} q & p \\ -r & 0 \end{pmatrix} dx \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, во-первых, *решение задачи Коши для уравнения Риккати можно найти как отношение $y = u : v$ координат решения системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} u' = pu + qv, \\ v' = -ru, \end{cases}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{x=x_0} = y_0, \quad v|_{x=x_0} = 1.$$

В справедливости сказанного можно убедиться прямым вычислением:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{puv + qv^2 + ru^2}{v^2} = py + q + ry^2.$$

Во-вторых, *явная схема Эйлера для этой системы линейных уравнений дает нашу проективную схему (13) для уравнения Риккати.*

Разумеется, сам факт возможности сведения уравнения Риккати к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка хорошо известен и, более того, лежит в основе всей теории интегрирования уравнений Риккати в элементарных функциях. Вообще говоря, можно было бы написать явную схему для этого линейного уравнения и из нее получить нашу проективную схему для уравнения Риккати. С этой точки зрения утверждение теоремы 3.1 уже не выглядит столь неожиданным.

Таким образом, для уравнения Риккати можно составить проективную разностную схему (16), которая обладает тремя свойствами:

- она задает проективное соответствие между слоями;
- вычисления по ней можно продолжать за подвижные особые точки;
- переход к проективным координатам превращает эту схему в явную схему Эйлера для той системы двух линейных дифференциальных уравнений, к которой сводится уравнение Риккати. Мы положили в основу нашего рассмотрения второе из этих свойств, как очевидно полезное с практической точки зрения.

4. ПРОЕКТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВИДА $y' = f(x, y)$

4.1. Разностные схемы, задающие бирациональное соответствие между слоями. Обратимся теперь к вопросу о том, как для дифференциальных уравнений (10) строить разностные схемы(13), счет по которым можно продолжать после подвижных особых точек. Затруднение здесь в том, что эти разностные схемы задаются алгебраическими уравнениями, а желанное свойство не является алгебраическим. Однако наша схема для уравнения Риккати обладает и одним весьма приметным алгебраическим свойством: она задает бирациональное соответствие между слоями. Покажем, что этого свойства схемы достаточно, чтобы счет по схеме можно было продолжить за особые точки.

Вопрос в таком случае можно поставить так: для каких дифференциальных уравнений (10) можно составить разностную схему, задающую бирациональное соответствие между слоями?

Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.1 (Малых М. Д., 2015 [30]). Пусть $f(x, y) \in \mathbb{Q}(x, y)$. Если для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ можно составить схему, задающую взаимно-однозначное соответствие между слоями, в качестве которых используются проективные прямые, то это уравнение — уравнение Риккати.

Доказательство. Всякое взаимно-однозначное соответствие между слоями является дробно-линейным, поэтому разностная схема неизбежно имеет вид

$$\alpha + \beta y + \gamma \hat{y} + \delta y \hat{y} = 0,$$

где коэффициенты $\alpha, \dots, \delta \in \mathbb{Q}[x, \Delta x]$. Если подставить в левую часть $\hat{y} = y$ и $\Delta x = 0$, то получится многочлен, равный нулю тождественно. Поэтому многочлены

$$\alpha, \beta + \gamma, \delta$$

обращаются в нуль при $\Delta x = 0$. Поэтому эти многочлены делятся на Δx , т. е. найдутся такие многочлены $p, q, r \in \mathbb{Q}[x, \Delta x]$, что

$$\alpha = p\Delta x, \beta + \gamma = q\Delta x, \delta = r\Delta x.$$

Теперь схему можно переписать так:

$$\beta \cdot (\hat{y} - y) = (p + q\hat{y} + r y \hat{y})\Delta x.$$

Это не что иное, как наша проективная схема (16), которая аппроксимирует уравнение Риккати. \square

Замечание 4.1. Эта теорема является разностным аналогом теоремы Л. Фукса 1.2.

Доказанная теорема существенным образом ограничивает обобщение приемов, найденных в предыдущем разделе, но зато позволяет объяснить, почему именно решения уравнений Риккати были приняты за классические трансцендентные функции. В классе дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной, уравнения Риккати образуют трижды примечательный класс:

- во-первых, они и только они обладают свойством Пенлеве и потому их точное решение можно представить в виде отношения всюду сходящихся степенных рядов;

- во-вторых, для них и только для них можно составить разностные схемы, задающие взаимно-однозначное соответствие между слоями;

- в-третьих, для них можно составить разностные схемы, вычисления по которым можно продолжать за подвижные особые точки.

Традиционно первое свойство принимают за определение классических трансцендентных функций, поэтому 2-е и 3-е свойства раскрывают смысл этого понятия с точки зрения теории разностных схем.

4.2. Проективные разностные схемы произвольного порядка. В силу теоремы 4.1 для уравнений, отличных от уравнения Риккати, приходится использовать разностные схемы, не задающие взаимно-однозначного соответствия между соседними слоями.

Чтобы перейти от начального значения y_0 к конечному y_N по разностной схеме (13), нужно исключить из системы

$$G(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0, \dots, G(x_{N-1}, x_N, y_{N-1}, y_N) = 0$$

переменные y_1, \dots, y_{N-1} , в результате получится алгебраическое уравнение

$$R(x_0, \dots, x_N, y_0, y_N) = 0,$$

связывающее y_0 и y_N , т.е. задающее алгебраическое соответствие между начальным и конечным слоем. Степени этого уравнения относительно y_0 и y_N , вообще говоря, зависят от N и могут оказаться весьма значительными. Это означает, что число различных значений для y_N , отвечающих одному значению y_0 , может зависеть от шага и быть весьма большим.

Пример 4.1. Пусть f — многочлен степени s . Тогда неявная схема Эйлера

$$\hat{y} - y = f(\hat{x}, \hat{y})\Delta x$$

задает $(1, s)$ -соответствие между соседними слоями, т.е. одному y отвечает s значений \hat{y} , из которых для дальнейшего важно лишь одно, близкое в топологии \mathbb{R} к y . Исключая из системы

$$y_1 - y_0 = f(x_1, y_1)\Delta x, \dots, y_N - y_{N-1} = f(x_N, y_N)\Delta x$$

промежуточные точки y_1, \dots, y_{N-1} , мы получим уравнение

$$R(y_0, y_N) = 0,$$

степень которого относительно y_N будет равна s^N . Поэтому чисто алгебраическим путем для отыскания y_N можно получить лишь алгебраическое уравнение, степень которого растет экспоненциально с ростом N . На практике, конечно, счет организуют иначе: берут числовое значение y_0 и ищут приближенно y_1 как корень уравнения

$$y_1 - y_0 = f(x_1, y_1)\Delta x,$$

ближайший к y_0 .

Привести пример разностной схемы, которая задает $(2, 2)$ -соответствие между любыми слоями, совсем не трудно.

Пример 4.2. Разностная схема

$$x^2 + y^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$$

или

$$\hat{y} - y = -\frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\hat{y} + y}$$

аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

При этом переход со слоя на слой выполняется по формуле

$$x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2 = \dots = x_N^2 + y_N^2.$$

Поэтому одному значению y_n отвечают два значения y_m , которые получаются из уравнения

$$x_n^2 + y_n^2 = x_m^2 + y_m^2.$$

С геометрической точки зрения каждый слой подразделяется на системы по две точки в каждой. К одной системе в n -м слое относятся корни уравнения

$$x_n^2 + y^2 = C,$$

далее будем называть их сопряженными точками. Переход же со слоя на слой описывается как взаимно-однозначное соответствие между названными подразделениями слоев и двухточечными подмножествами.

В алгебраической геометрии описанная конструкция хорошо известна как проективное соответствие [31].

Определение 4.1. Алгебраическое (m, n) -соответствие между проективными прямыми называется проективным, если первую прямую можно разбить на множество M_1 непересекающихся списков по m точек в каждом, а вторую прямую — на множество M_2 непересекающихся списков по n точек в каждом таким образом, что исходное соответствие порождает взаимно-однозначное соответствие между этими множествами. В случае, когда $n = m$, говорят о проективном соответствии n -го порядка.

Это определение позволяет геометрически описать разностную схему, задающую (n, n) -соответствие между любыми слоями.

Теорема 4.2. Разностная схема, аппроксимирующая дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с рациональной правой частью и задающая (n, n) -соответствие между любыми слоями, задает проективное соответствие n -го порядка между соседними слоями. Иными словами, слои P_0, \dots, P_N можно разбить на множества M_0, \dots, M_N по n точек в каждом таким образом, что переход со слоя на слой порождает взаимно-однозначное соответствие между этими множествами.

Доказательство. Пусть схема описывается уравнением (13). Для того чтобы это уравнение задавало (n, n) -соответствие между соседними слоями, необходимо и достаточно, чтобы оно имело степень n относительно y и \hat{y} .

(i) Подразделение слоев. Произвольному значению y_0 отвечает n корней уравнения

$$G(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0,$$

объединим их в список $(y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(n)})$. Если при нашем числовом выборе значений x_0, x_1, y_0 старший коэффициент при y_1 обращается в нуль, в список добавляется ∞ , как это принято в проективной геометрии. Поскольку схема аппроксимирует дифференциальное уравнение, одно из этих значений, скажем y'_1 , близко к y_0 и

$$y'_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x + \dots$$

Каждому из чисел списка $(y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(n)})$ отвечает по n чисел на 2-м слое. Вообще говоря, всего получается n^2 чисел. Чтобы степени не росли, необходимо, чтобы числам, входящим в список $(y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(n)})$, отвечали одни и те же числа на втором слое, т. е. чтобы уравнения

$$G(x_1, x_2, y_1^{(m)}, y_2) = 0$$

при всех $m = 1, \dots, n$ имели бы одни и те же корни. Соберем эти корни опять в список $(y'_2, y''_2, \dots, y_2^{(n)})$. Получается, что соседние слои можно разбить на списки по n точек в каждом так, чтобы одному списку отвечал один список на следующем.

(ii) Списки не пересекаются. Если бы списки на 1-м слое пересекались, скажем списки $(y'_1, y''_1, \dots, y_1^{(n)})$ и $(z'_1, z''_1, \dots, z_1^{(n)})$ имели общий элемент $y'_1 = z'_1$, то этим спискам отвечал бы один и тот же список на 2-м слое. В таком случае числа $y_1, y''_1, \dots, y_1^{(n)}$ и $z'_1, z''_1, \dots, z_1^{(n)}$ являются корнями уравнения

$$G(x_1, x_2, y_1, y'_2) = 0$$

относительно y_1 . Коль скоро степень этого уравнения равна n , оба списка совпадают полностью.

Рассматривая тем же путем переход со 2-го на 3-й слой, видим, что и списки, на которые делятся точки 2-го слоя, не должны пересекаться.

(iii) Соответствие между списками взаимно-однозначное. В силу (i) одному списку отвечает один список на следующем. Обратно, по заданному списку $(y'_2, y''_2, \dots, y_2^{(n)})$ на 2-м слое можно однозначно восстановить слой на 1-м, заполнив его корнями уравнения

$$G(x_1, x_2, y_1, y'_2) = 0.$$

В силу произвольности слоев это означает, что искомая схема устроена следующим образом: слои можно поделить на непересекающиеся списки по n точек в каждом, таким образом, что порождается взаимно-однозначное соответствие между множеством списков на 1-м слое и аналогичным множеством на 2-м. \square

Доказанная теорема дает повод к следующему определению.

Определение 4.2. Разностные схемы, задающие (n, n) -соответствие между любыми слоями, будем называть проективными разностными схемами n -го порядка.

В частности, схема (16) является проективной разностной схемой 1-го порядка, а схема из примера 4.2 — проективной разностной схемой 2-го порядка.

4.3. Дифференциальные уравнения, допускающие аппроксимацию проективными разностными схемами. Теорема Люрота в своей старой, доплетней формулировке [41] описывает проективное преобразование n -го порядка. Это представление без больших усилий позволяет утверждать следующее.

Теорема 4.3. Для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с рациональной правой частью можно составить проективную разностную схему n -го порядка в том и только в том случае, когда рациональной заменой n -го порядка его можно свести к уравнению Риккати.

Доказательство. Из теоремы Люрота [41] следует, что списки точек являются точками равного уровня некоторой рациональной функции. Эта

функция меняется от слоя к слою, поэтому зависит от x . Обозначим ее как $r(x, y)$. Уравнение

$$t = r(x, y)$$

задает взаимно-однозначное соответствие между точками проективной прямой, вдоль которой меняется переменная t , и списками на x -слое. Следовательно, проективная схема

$$G(x, \hat{x}, y, \hat{y}) = 0$$

задает взаимно-однозначное соответствие между переменными $t = r(x, y)$ и $\hat{t} = r(\hat{x}, \hat{y})$. Поскольку всякое взаимно-однозначное соответствие является дробно-линейным, это означает, что проективная разностная схема всегда может быть записан в виде

$$\alpha(x, \hat{x}) + \beta(x, \hat{x})r + \gamma(x, \hat{x})\hat{r} + \delta(x, \hat{x})r\hat{r} = 0.$$

Это означает, что рациональной заменой проективная схема n -го порядка может быть сведена к проективной схеме первого порядка. В силу теоремы 4.1 эта разностная схема относительно переменной $t = r(x, y)$ аппроксимирует некоторое уравнение Риккати. \square

Теорема 4.3 описывает *дифференциальные уравнения, допускающие аппроксимацию проективными разностными схемами, как уравнения, сводящиеся рациональной подстановкой к уравнению Риккати*. Этот класс дифференциальных уравнений рассматривался в упомянутых выше в п. 1.8 работах Пенлеве, однако на данный момент в нашем распоряжении нет алгоритма, позволяющего выяснить за конечное число действий, принадлежит ли ему заданное дифференциальное уравнение или нет.

Пример 4.3. Дифференциальное уравнение

$$(x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - 2y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy = 0 \quad (24)$$

было получено из уравнения Риккати

$$\frac{dz}{dx} = x^2 + z^2$$

подстановкой

$$z = \frac{y(y+x)}{y-x}.$$

Уравнение (24) примечательно тем, что его решение выражается явно в цилиндрических функциях, однако ни Maple 2016.1, ни WolframAlpha это решение не находят. При этом уравнение Риккати $z' = x^2 + z^2$ в Maple без труда интегрируется.

В своей первой работе [22] Пенлеве доказал, что дифференциальное уравнение, общее решение которого зависит от константы алгебраически, рациональной заменой сводится к уравнению Риккати. По всей видимости, Пенлеве хотел доказать большее: если решение задачи Коши (11) является n -значной функцией y_0 , то оно рациональной заменой сводится к уравнению Риккати. Здесь, однако, возникли трудности, связанные с подсчетом ветвей у общего решения, вынудившие Пенлеве позже внести некоторые весьма существенные коррективы в свою первую работу [37]. Попытка рассматривать решение начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = y_0,$$

на отрезке $[a, b]$ как (n, n) -соответствие между начальным и конечным слоями всегда опирается в теорему Коши о единственности решения. Увязать одно с другим, конечно, можно, но получающаяся теория много теряет в наглядности [26]. *Теорема 4.3*, будучи по существу разностным аналогом теоремы Пенлеве о сведении к уравнению Риккати, *заменяет трудное понятие об общем решении как многозначной функции константы простым и естественным представлением о разностной схеме как алгебраическом уравнении n -го порядка.*

4.4. Дифференциальные уравнения, допускающие аппроксимацию проективными разностными схемами 2-го порядка. Сейчас мы ограничимся более простым вопросом: как за конечное число действий выяснить, можно ли составить для заданного дифференциального уравнения проективную схему 2-го порядка? Или же, в силу эквивалентности различных описаний рассматриваемого класса дифференциальных уравнений, как за конечное число действий выяснить, можно ли свести заданное дифференциальное уравнение к уравнению Риккати подстановкой 2-го порядка?

Замечание 4.2. Необходимость наложения ограничения на порядок многочленов оставляет теорию незавершенной. Однако это затруднение типично для задач интегрирования в конечном виде, начиная с задачи Дебона о существовании алгебраического интеграла. В нашем распоряжении имеются методы, в том числе реализованные в виде пакета под Sage [42], позволяющие за конечное число шагов выяснить, являются ли интегральные кривые заданного дифференциального уравнения алгебраическими кривыми заданного порядка N , но нет возможности избавиться от необходимости задания порядка N [43].

Если дифференциальное уравнение можно аппроксимировать проективной схемой второго порядка, то в силу теоремы 4.3 это уравнение сводится рациональной подстановкой 2-го порядка к уравнению Риккати. В [26] был предложен алгоритм, позволяющий выяснить, сводится ли заданное дифференциальное уравнение к уравнению Риккати подстановкой 2-го порядка. Ре-

ализация нашего алгоритма в Sage позволила отыскать подстановку в том числе для уравнения из примера 4.3, однако исполнение программы потребовало довольно много времени и ресурсов.

Потерпев здесь неудачу, вернемся к исходной, конечно-разностной постановке вопроса: как за конечное число действий выяснить, можно ли составить для заданного дифференциального уравнения проективную схему 2-го порядка? Ответ на этот вопрос дает классическая теория инволюций, развитая в проективной геометрии [44].

Теорема 4.4. Если для дифференциального уравнения

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y], \quad (25)$$

можно составить проективную схему 2-го порядка, то степень многочлена q не превышает 2. Если она в точности равна двум и уравнение

$$q(x, y) = 0$$

имеет два корня $y = \alpha(x)$ и $y = \beta(x)$, то преобразование $t = r(x, y)$, переводящее исходное уравнение в уравнение Риккати, переводит точки y и y' , гармонически сопряженные относительно точек α и β , в одну и ту же точку оси t .

Замечание 4.3. Напомним, что точки y и y' называются гармонически сопряженными относительно точек α и β , если

$$(\alpha, \beta, y, y') = -1.$$

Избавляясь от ангармонического отношения, это равенство можно переписать как

$$\frac{\alpha - y'}{y' - \beta} = -\frac{\alpha - y}{y - \beta}.$$

Доказательство. (i) По определению каждый слой можно разбить на списки по две точки в каждом, таким образом, что разностная схема будет задавать взаимно-однозначное соответствие между этими списками. Точки, входящие в один и тот же список будем называть сопряженными, а точку, сопряженную точке y , будем обозначать как y' . Таким образом, точке y , равно как и точке y' , отвечают две точки

$$\hat{y} = y + f(x, y)\Delta x + \dots, \quad \hat{y}' = y' + f(x, y')\Delta x + \dots,$$

а точке \hat{y} , равно как и точке \hat{y}' , отвечают точки y и y' .

Подчеркнем, что операция сопряжения зависит от слоя, т.е. от x , но не зависит от других слоев, т.е. от Δx . Операция сопряжения задает взаимно-однозначное преобразование проективной прямой. Поскольку двойное применение этой операции возвращает исходную точку, т.е. $(y')' = y$, это преобразование является инволюционным соответствием [44, гл. 2, § 6].

(ii) Чтобы отыскать сопряженную точку, из системы

$$G(x, \hat{x}, y, \hat{y}) = 0, \quad G(x, \hat{x}, y', \hat{y}) = 0$$

следует исключить \hat{y} . Результат этой системы должен зависеть не от \hat{x} , а только от x . Поэтому, устремив \hat{x} к x , мы сразу получим уравнение

$$G(x, x, y, y') = 0, \tag{26}$$

которому должны удовлетворять сопряженные точки.

В силу теоремы 2.1 всякая схема (13), которая аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y],$$

имеет вид

$$\mu(p\Delta x + q\Delta y) + \dots = 0, \tag{27}$$

где многочлен μ — разностный аналог интегрирующего множителя. Подставляя это выражение в (26), имеем

$$\mu(x, y)q(x, y)(y' - y) + \mu_2(x, y)(y - y')^2 + \dots = 0$$

или

$$(y' - y) \cdot (\mu(x, y)q(x, y) + \mu_2(x, y)(y - y') + \dots) = 0.$$

Операция сопряжения не является тождественным преобразованием, хотя корень $y' = y$ уравнение (26), конечно, имеет. Поэтому точка, сопряженная к y , является корнем второго множителя, а именно

$$\mu(x, y)q(x, y) + \mu_2(x, y)(y - y') + \dots = 0.$$

(iii) Вспомним теперь, что всякое проективное преобразование имеет две неподвижные точки, которые могут совпасть или оказаться комплексными. Неподвижные точки инволюционного преобразования, т.е. точки, для которых $y = y'$, удовлетворяют уравнению

$$\mu(x, y)q(x, y) = 0.$$

Поскольку таких точек не более двух, порядок многочлена μq по y не превосходит 2. Отсюда сразу получается первое утверждение теоремы.

(iv) Допустим теперь, что q — многочлен 2-й степени по y и поэтому множитель μ неизбежно равен 1 и что уравнение

$$q(x, y) = 0$$

имеет два различных корня $y = \alpha(x)$ и $y = \beta(x)$. Именно эти точки являются неподвижными точками инволюционного преобразования. Согласно основной теореме теории инволюций по ним можно восстановить все инволюционное соответствие: любые две сопряженные точки y и y' делят отрезок $[\alpha, \beta]$ гармонически.

(v) Преобразование $t = r(x, y)$, переводящее исходное уравнение (25) в уравнение Риккати, было построено при доказательстве теоремы 4.3: оно переводит пары сопряженных точек в точки оси t . \square

Если задано дифференциальное уравнение (25), причем степень многочлена q по y равна 2 и уравнение

$$q(x, y) = 0$$

имеет два корня, то выяснить, аппроксимируется ли это уравнение проективной схемой 2-го порядка, можно следующим образом:

- 1) найти корни $y = \alpha(x)$ и $y = \beta(x)$ уравнения $q(x, y) = 0$;
- 2) из равенства

$$(\alpha, \beta, 0, 0') = -1$$

отыскать точку $0'$, сопряженную нулю;

- 3) из равенства

$$(\alpha, \beta, \infty, \infty') = -1$$

отыскать точку ∞' , сопряженную нулю;

4) составить любую рациональную функцию $t = r(x, y)$ 2-го порядка по y , обращающуюся в нуль в точках 0 и $0'$ и в ∞ — в точках ∞ и ∞' ;

5) проверить, переводит ли эта функция исходное уравнение в уравнение Риккати.

Пример 4.4. Для уравнения (24) имеем

$$q = x^2 + 2xy - y^2,$$

откуда

$$\alpha = (1 + \sqrt{2})x, \quad \beta = (1 - \sqrt{2})x,$$

и поэтому

$$y' = \frac{x^2 + xy}{y - x}.$$

В частности,

$$0' = -x, \quad \infty' = x.$$

Рациональную функцию r 2-го порядка, которая обращается в нуль при $y = 0$ и $y = -x$, в бесконечность — при $y = \infty$ и $y = x$, можно записать так:

$$r = \lambda(x) \frac{y(y+x)}{y-x}.$$

Поскольку дробно-линейное преобразование переводит уравнение Рикати в другое уравнение Риккати, множитель λ никак не влияет на то, приводит ли эта подстановка исходное уравнение к уравнению Риккати или нет. Поэтому остается прямым вычислением проверить, переводит ли преобразование

$$z = \frac{y(y+x)}{y-x}$$

исходное уравнение в уравнение Риккати. В данном случае эта подстановка приводит к уравнению

$$\frac{dz}{dx} = x^2 + z^2.$$

Таким образом, для аппроксимации исходного уравнения можно использовать проективную схему

$$\hat{z} - z = (x^2 + z\hat{z})\Delta x$$

или

$$\frac{\hat{y}(\hat{y}+x)}{\hat{y}-x} - \frac{y(y+x)}{y-x} = \left(x^2 + \frac{y(y+x)}{y-x} \frac{\hat{y}(\hat{y}+x)}{\hat{y}-x} \right) \Delta x.$$

Если степень многочлена q меньше 2, дробно-линейное преобразование позволяет свести исследование к изученному случаю, если исключить из рассмотрения особые случаи.

Замечание 4.4. Как видно, уравнение из примера 4.3 удалось свести к уравнению Риккати без сколько-нибудь громоздких вычислений. Ключевым моментом решения был переход от дифференциальных уравнений к разностным, т. е. дискретизация исходной дифференциальной задачи. По все видимости, «правильная дискретизация» теории и должна приводить к упрощению алгоритмов [45].

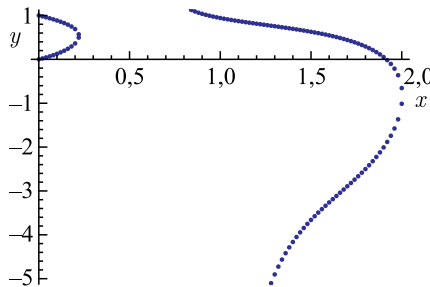


Рис. 4. Одна из интегральных кривых для уравнения (24)

4.5. Вычисления по проективным разностным схемам. В силу теорем 3.1 и 4.3 вычисления по проективным схемам можно продолжать за подвижные особые точки без накопления ошибки.

Пример 4.5. Построим решение начальной задачи для уравнения (24) с начальным условием $y(0) = 1$ по разностной схеме, указанной в конце примера 4.4. Каждому значению x_n поставлено в соответствие по две точки, y_n и сопряженная к ней. Поэтому в качестве графика (см. рис. 4) сразу получается интегральная кривая, которая не проектируется однозначно на ось Ox . Хорошо видно, что разностная схема позволяет описывать как уход интегральной кривой на бесконечность, так и прохождение через точки алгебраических особенностей.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На наш взгляд, важной частью математического моделирования физических явлений является создание цепочек моделей, а не только разработка численных методов анализа моделей и символьных методов упрощения моделей. При этом весьма желательно, чтобы во главе иерархии моделей лежали модели, анализ которых можно выполнить наиболее просто современными численными методами.

В деле отыскания простых моделей наблюдается инерция, благодаря которой простыми считаются модели, основанные на интегрируемых в символьном виде дифференциальных уравнениях. В первой главе мы дали краткий обзор методов символьного интегрирования и показали, что существующие комплексы программ предлагают в качестве «точно решаемых» дифференциальные уравнения, решения которых было бы удобно вычислять численными методами тех эпох, когда таблицы элементарных функций были во всеобщем употреблении, а степенные ряды считались эффективным численным инструментом. В настоящее время основным методом решения дифференциальных уравнений стал метод конечных разностей, поэтому представляется разумным поставить задачу об отыскании дифференциальных уравнений, простых именно с точки зрения применения к ним метода конечных разностей.

Мы называем уравнение простым, если для него можно составить разностную схему, счет по которой свободен от известных затруднений, характерных для метода конечных разностей. Как известно, при решении дифференциальных уравнений по этому методу возникает несколько затруднений. В настоящей работе мы остановились на одной из них: на ухудшении аппроксимации в окрестности подвижной особой точки.

В качестве первого шага и вопреки устоявшемуся мнению мы показали, что для уравнения Риккати можно составить разностную схему, счет по которой можно продолжать за подвижные полюса без заметного накопления ошибки. Уже на этом этапе можно было поставить задачу об описании класса

всех дифференциальных уравнений (и не только первого порядка), для которых можно составить такие разностные схемы. Однако названное свойство не является алгебраическим и поэтому не понятно, как исследовать этот вопрос.

Исследование нашей разностной схемы для уравнения Риккати подтолкнуло нас взглянуть на разностную схему как на алгебраическое соотношение, задающее соответствие между слоями, в качестве которых в случае дифференциальных уравнений вида $y' = f(x, y)$ естественно принять проективные прямые. Наша разностная схема для уравнения Риккати примечательна тем, что она задает проективное соответствие между слоями.

Затем мы увидели, что счет по разностным схемам, задающим проективные соответствия между слоями, всегда можно продолжать за особые точки. Это свойство — алгебраическое, поэтому класс дифференциальных уравнений, для которых можно составить проективные разностные схемы, удалось описать. Это — дифференциальные уравнения, сводимые алгебраической подстановкой к уравнению Риккати. Этот класс рассматривался в ранних работах Пенлеве, более того, все результаты Пенлеве, касающиеся дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от констант алгебраически, можно перевести на язык конечных разностей. При этом теория только выигрывает в ясности.

Это подводит наши исследования к такой важной теме, как конструирование разностных схем, сохраняющих в том или ином смысле алгебраические свойства дифференциального уравнения. Пожалуй, наиболее известным примером такого рода схем являются симплектические схемы Рунге–Кутты, сохраняющие симплектическую структуру уравнений Гамильтона и, как следствие, точно сохраняющие все квадратичные интегралы [46]. Эти схемы, при всей сложности их построения и организации счета, позволяют продолжать счет на весьма значительные временные интервалы, что особенно важно для расчета траектории спутников и прочих малых тел в Солнечной системе.

С другой стороны, нельзя не заметить, что наши методы опираются на методы проективной геометрии. Мы надеемся, что и для систем дифференциальных уравнений удастся создать разностные схемы, сохраняющие алгебраические свойства исходной системы, и что для этого будет достаточно результатов из алгебраической геометрии. Иными словами, мы полагаем, что конструирование разностных схем потребует как приложения наиболее абстрактных разделов геометрии, традиционно относимых к чистой математике, так и создания программных комплексов для работы с алгебраическими многообразиями и группами их преобразований.

На наш взгляд, разработка того рода комплексов, из которых самым известным является пакет AlgCurves for Maple, тормозится именно из-за отсутствия приложений. Мы надеемся, что нужды математического моделирования придадут новый импульс для развития компьютерных методов в классических вопросах алгебраической геометрии.

Благодарности. Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при частичной поддержке грантами РФФИ № 18-51-18005, 18-07-00567.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апфель П.* Механика. Т. 1. М.: Физматлит, 1960.
2. *Moses J.* Symbolic Integration. MIT, 1967.
3. *Bronstein M.* Symbolic Integration I. Springer, 1997.
4. www.apmaths.uwo.ca/arich
5. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
6. *Cheb-Terrab E. S.* Computer Algebra Solving of First Order Odes // Comput. Phys. Commun. 1997. V. 101. P. 254–268.
7. *Cheb-Terrab E. S., Kolokolnikov T.* First Order Odes, Symmetries and Linear Transformations // Eur. J. App. Math. 2003. V. 14, No. 2. P. 231–246.
8. *Avellar J., Duarte L. G. S., Duarte S. E. S., da Mota L. A. C. P.* Lsolver (Version 2.0). Computer Physics Communications Program Library, 2013. http://cpc.cs.qub.ac.uk/summaries/ADZF_v1_0.html.
9. <http://malykhmd.neocities.org>
10. *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes // Crelle's Journal. 1833. V. 13, No. 2. P. 93–118.
11. *Вутмух Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Москва: ГТТИ, 1960.
12. *Schlesinger L.* Einführung in die Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Funktionentheoretischer Grundlage. Berlin-Leipzig: De Gruyter, 1922.
13. *Горизли А.* Интегрируемость и сингулярность. М.; Ижевск: R & C, 2006.
14. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.
15. *Juan J. Morales Ruiz.* Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems. Basel: Birkhäuser, 1999
16. *Парфентьев Н. Н.* Отзыв о работе проф. Schlesinger'a из Гиссена ... // Известия физико-математического общества при Имп. Казанском ун-те. 2-я сер. 1912. Т. XVIII, № 4.
17. NIST Digital Library of Mathematical Functions // <http://dlmf.nist.gov/>, ver. 1.0.15, 2017.
18. *Painlevé P.* Le cons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (septembre, octobre, novembre 1895) sur l'invitation de S. M. le roi de Suède et de Norwége. // Œuvres de Painlevé. Т. 1. Paris: CNRS, 1971.
19. *Лу С.* Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 2. М.; Ижевск, 2011.

20. Painlevé P. Existence de l'intégrale generale // Enc. des sciences math., art. II-15.
21. Васильев С. А., Еднерал В. Ф., Малых М. Д., Севастьянов Л. А. Дифференциальные уравнения. М.: РУДН, 2017.
22. Painlevé P. Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. // Œuvres de Painlevé. Т. 2. Paris: CNRS, 1974. P. 237–461.
23. Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: МИФИ, 2002.
24. Umemura H. Birational Automorphism Groups and Differential Equations // Nagoya Math. J. 1990. V. 119. P. 1–80.
25. Малых М. Д. О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде // Записки научных семинаров ПОМИ РАН. 2015 Т. 432. P. 196–223.
26. Малых М. Д. О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы // Вестник НИЯУ МИФИ. Т. 5, № 2. С. 152–161.
27. Рябенский В. С. Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956.
28. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
29. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., ГИТТЛ, 1950.
30. Малых М. Д. О приближенном решении дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически // Вестник РУДН. Сер. математика, информатика, физика. 2015. № 3. С. 5–9.
31. Cremona L. Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. Bologna: Gamberini e Parmeggiani, 1862.
32. Зигель К., Мозер Ю. Лекции по небесной механике. R&C, 2001.
33. Schlesinger L. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Leipzig und Berlin: Teubner, 1908.
34. Гантмахер Ф. П. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
35. Singer M. F. Liouvillian First Integral of Differential Equations // Trans. Amer. Math. Soc., 1992. V. 333, No. 2. P. 673–688.
36. Avellar J., Duarte L. G. S., Duarte S. E. S., da Mota L. A. C. P. Determining Liouvillian First Integrals for Dynamical Systems in the Plane // Comput. Phys. Commun., 2007. V. 177, No. 7. P. 584–596.
37. Painlevé P. Sur les équations différentielles du premier ordre dont l'inégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches // Œuvres de Painlé. Т. 2. Paris: CNRS, 1974. P. 767–813.
38. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Л.: АН СССР, 1933.

39. *Al'shina E. A., Kalitkin N. N., Koryakin P. V.* The Singularity Diagnostic in Calculations with Accuracy Control // *Comp. Math. Math. Phys.* 2005. V. 45, No. 10. P. 1769–1779.
40. *Белов А. А.* Численное обнаружение и исследование сингулярностей решения дифференциальных уравнений // *Докл. РАН.* 2016. Т. 467, № 1. С. 21–25.
41. *Severi F.* *Lezioni di geometria algebrica.* Padova: Angelo Graghi, 1908.
42. *Малых М. Д.* О применении метода М. Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений в символьном виде // *Вестник РУДН.* Т. 25, № 2. С. 113–122.
43. *Bostan A., Chéze G., Cluzeau T., Weil J.-A.* Efficient Algorithms for Computing Rational First Integrals and Darboux Polynomials of Planar Polynomial Vector Fields // *Math. Comp.* 2016. V. 85. P. 1393–1425.
44. *Глаголев Н. А.* *Проективная геометрия.* М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
45. *Бобенко А. И., Сурис Ю. Б.* *Дискретная дифференциальная геометрия.* М.; Ижевск: R& C, 2010.
46. *Sanz-Serna J. M.* Symplectic Runge–Kutta Schemes for Adjoint Equations, Automatic Differentiation, Optimal Control, and More // *SIAM Review.* 2016. V. 58, No. 1. P. 3–33.

Получено 2 апреля 2018 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАЗРЕШИМОСТЬ В СИМВОЛЬНОМ ВИДЕ	1
1.1. Единообразии математических моделей	1
1.2. Теория Галуа в XIX веке	1
1.3. Простая модель	3
1.4. Какие дифференциальные уравнения интегрируются в CAS?	4
1.5. Численные методы XVIII века и теория Галуа	7
1.6. Численные методы решения дифференциальных уравнений	9
1.7. Дифференциальная теория Галуа и конечные разности	11
1.8. Теория классических трансцендентных функций в работах Пенлеве	12
2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	15
2.1. Разностные схемы	15
2.2. Аппроксимация дифференциального уравнения разностной схемой	16
2.3. Подвижные особые точки	18
3. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ И КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ	20
3.1. Схема, вычисления по которой можно продолжить за подвижные особые точки	21
3.2. Алгебраические свойства схемы	22
3.3. Доказательство теоремы 3.1	24
3.4. Проективные координаты и сведение уравнения Риккати к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка	27
4. ПРОЕКТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВИДА $y' = f(x, y)$	29
4.1. Разностные схемы, задающие бирациональное соответствие между слоями	29
4.2. Проективные разностные схемы произвольного порядка	30
4.3. Дифференциальные уравнения, допускающие аппроксимацию проективными разностными схемами	33
4.4. Дифференциальные уравнения, допускающие аппроксимацию проективными разностными схемами 2-го порядка	35
4.5. Вычисления по проективным разностным схемам	40
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	40
ЛИТЕРАТУРА	42

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 27.06.2018.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,81. Уч.-изд. л. 3,15. Тираж 215 экз. Заказ № 59435.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/