

Д17-2022-30

Ю. М. Шукринов<sup>1,2, a</sup>, М. Нашаат<sup>1,3, b</sup>

СОТРУДНИЧЕСТВО ОИЯИ С НАУЧНЫМИ  
УЧРЕЖДЕНИЯМИ ЕГИПТА В ОБЛАСТИ  
ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ  
НАНОСТРУКТУР

Направлено в журнал «ЭЧАЯ»

---

<sup>1</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>2</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

<sup>3</sup> Кафедра физики, факультет естественных наук Каирского университета, Гиза, Египет

<sup>a</sup> E-mail: shukrinv@theor.jinr.ru

<sup>b</sup> E-mail: majed@sci.cu.edu.eg

Шукринов Ю. М., Нашаат М.

D17-2022-30

Сотрудничество ОИЯИ с научными учреждениями Египта в области теоретических исследований сверхпроводящих джозефсоновских наноструктур

Представлен обзор результатов, полученных в рамках сотрудничества ОИЯИ с научными учреждениями Египта в области теоретических исследований и моделирования различных сверхпроводящих джозефсоновских наноструктур. В частности, рассмотрены системы связанных джозефсоновских переходов с различного типа шунтированием, представлены результаты, отражающие их фазовую динамику и вольт-амперные характеристики при различных резонансных явлениях. Большое внимание уделено исследованию сверхпроводниковых структур с ферромагнитными материалами, позволяющих управлять магнитными свойствами системы посредством сверхпроводящего тока. Важное место занимают совместные исследования топологических и хаотических явлений в джозефсоновских структурах.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2022

Shukrinov Yu. M., Nashaat M.

D17-2022-30

JINR Collaboration with Scientific Institutions of Egypt in the Field of Theoretical Research of Superconducting Josephson Nanostructures

An overview of the results obtained in the framework of JINR collaboration with Egyptian scientific institutions in the field of theoretical research and modeling of various superconducting Josephson nanostructures is presented. In particular, systems of coupled Josephson junctions with various types of shunting are considered, and results are presented that reflect their phase dynamics and current–voltage characteristics for various resonance phenomena. Much attention is paid to the study of superconducting structures with ferromagnetic materials, which make it possible to control the magnetic properties of the system by a superconducting current. An important place is occupied by joint studies of topological and chaotic phenomena in Josephson structures.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2022

## ВВЕДЕНИЕ

Сотрудничество ОИЯИ с научными учреждениями Египта в области теоретических исследований сверхпроводящих наноструктур началось в 2010 г. Оно было инициировано Учебным центром ОИЯИ, ежегодно организующим практику молодых ученых и студентов в лабораториях ОИЯИ (рис. 1–3). В течение следующих пяти лет одиннадцать молодых ученых и студентов присоединились к практике в Лаборатории теоретической физики по теме «Компьютерное моделирование туннельных характеристик сверхпроводящих наноструктур». Семь из них, Махмуд Гаафар, Ахмед Мараван, Хазем Абдель Хафиз, Мостафа Ел Демери, Радва Давуд, Маджед Нашаат и Али Абухасва, продолжили работу и участвовали в совместных публикациях [1–22].

Основной нашей целью является создание базы для фундаментальных и прикладных исследований в области сверхпроводниковой электроники и спинтроники в обеих странах. В настоящее время проводятся интенсивные совместные работы по моделированию сверхпроводящих наноструктур, в частности, связанных джозефсоновских переходов, шунтированных систем и гибридных джозефсоновских структур с различного типа барьерами. Это позволяет изучать фазовую динамику, вольт-амперные характеристики и получать новую информацию о различных резонансных явлениях в данных структурах.

Проведенные до настоящего времени совместные исследования привели к ряду интересных результатов. В частности, предсказан гистерезис резонансного типа на вольт-амперной характеристике (ВАХ), возникающий в слоистых высокотемпературных сверхпроводниках [1]. Продемонстрировано возникновение электрического заряда на сверхпроводящих слоях и показано, что изменение амплитуды внешнего электромагнитного из-



Рис. 1. Участники практики для молодых ученых и студентов 2010 г. в лабораториях ОИЯИ. Среди них: Махмуд Гаафар, Ахмед Мараван, Хазем Абдель Хафиз, Маджед Нашаат и Али Абухасва, которые продолжили работу над сверхпроводящими наноструктурами и участвовали в совместных публикациях



Рис. 2. Участники практики для молодых ученых и студентов 2019 г. Среди них — Сара Али Абделмонеим, которая присоединилась к проекту по исследованию спинтронных эффектов в джозефсоновских переходах



Рис. 3. Участники практики молодых ученых и студентов 2022 г. Найра Мусса присоединилась к исследованиям SFS-структур

лучения меняет длину продольной плазменной волны, возникающей при параметрическом резонансе [2–5].

В работе [6] сообщалось о возникновении волны зарядовой плотности в системе связанных джозефсоновских переходов, где было показано преобразование продольной плазменной волны в волну зарядовой плотности, а также продемонстрированы переходы между волнами зарядовой плотности различного типа. В области ветвления на ВАХ обнаружены лестничные структуры ступенек Шапиро [7].

Кроме того, продемонстрированы эффекты стационарного и нестационарного разбаланса заряда в слоистых сверхпроводящих структурах [8–11]. Мы обнаружили, что эффект разбаланса заряда проявляется на ступеньке Шапиро, которая имеет конечный наклон и отклонение величины напряжения от его канонического значения. Величины сдвига и наклона зависят от времени релаксации квазичастиц и толщины сверхпроводящего слоя. В связи с этим мы показали, что открывается новая возможность определения времени релаксации квазичастиц по наклону ступеньки Шапиро. Трансформация бегущих в стоячие волны в шунтированных системах наблюдалась в работе [12].

Наше сотрудничество позволило разработать серию компьютерных программ для моделирования динамики и ВАХ джозефсоновских структур и сверхпроводниковых квантовых интерференционных устройств (СКВИДов) с нетривиальными барьерами [13–15]. Было показано, что вольт-амперные характеристики шунтированных джозефсоновских переходов с локализованными подщелевыми майорановскими состояниями обеспечивают фазочувствительный метод их обнаружения. Возникновение дополнительных лестничных структур на ВАХ позволяет разрабатывать методы регистрации майорановских состояний в джозефсоновских структурах. В случае СКВИДов с нетривиальными барьерами соответствующая резонансная ветвь имеет сдвиг по напряжению, что также может быть использовано для экспериментального обнаружения майорановских фермионов.

Важной задачей сверхпроводниковой спинтроники на основе джозефсоновских переходов (ДП) с магнитными барьерами является реализация управления магнитными свойствами посредством джозефсоновского тока и, аналогично, управления джозефсоновским током посредством магнитной системы [23–27]. В таких системах важную роль в достижении такого управления играет спин-орбитальная связь [28]. Примером может служить перемагничивание в структуре сверхпроводник/ферромагнетик/сверхпроводник (СФС) посредством импульса тока [29]. Этот эффект может найти применение в ряде приложений по созданию квантовых компьютеров на основе джозефсоновских переходов. В этой области нами получены интересные результаты при исследовании сверхпроводящих структур с магнитными материалами. Важное место в совместных исследованиях занимают исследования топологических и хаотических явлений в джозефсоновских структурах различных типов.

Хорошо известно, что при ферромагнитном резонансе (ФМР) спиновая волна может возбуждаться микроволновым магнитным полем, когда все элементарные спины прецессируют в фазе [30]. Связь между джозефсоновской фазой и спиновой волной изучалась в серии работ [27, 31–36]. В джозефсоновском СФС-переходе нами обнаружены возникающие под действием циркулярно поляризованного магнитного поля специфические лестничные структуры [16]. В работе [17] мы показали, что ширина линии ферромагнитного резонанса и резонансная частота сильно зависят от соотношения джозефсоновской и магнитной энергий. Мы также показали, что для СФС-переходов на топологическом изоляторе происходит расщепление лег-

кой оси ферромагнетика. Такое расщепление может привести к стабилизации нетрадиционного четырехкратно вырожденного ферромагнитного состояния [18].

Ряд интересных результатов был получен при исследовании проявлений свойств маятника Капицы в СФС-структурах. Как известно, пионерская работа Капицы [37] положила начало области вибрационной механики, а его метод использовался для описания периодических процессов в различных физических системах, таких как атомная физика [38–41], физика плазмы, оптика [42], физика конденсированного состояния, биофизика [43] и кибернетическая физика (см. [44–49]). В нелинейной теории управления маятник Капицы используется как пример параметрического осциллятора, демонстрирующий концепцию «динамической стабилизации». В нашей совместной работе мы показываем, что маятник Капицы является механическим аналогом СФС-перехода, если принять во внимание эффективное поле, обусловленное сверхтоком и током квазичастиц [19].

Кроме того, в работе [20] получены аналитические формулы, определяющие устойчивые положения магнитного момента как при внешнем периодическом возбуждении, так и без него, когда джозефсоновская частота больше частоты ферромагнитного резонанса. Более того, мы продемонстрировали влияние внешнего периодического возбуждения на напряжение полной переориентации и показали, что оно следует функции Бесселя. С другой стороны, для джозефсоновской частоты вблизи ферромагнитного резонанса мы демонстрируем переориентацию легкой оси ферромагнетика, связанную с изменением динамики намагниченности [21].

В недавней работе нами продемонстрированы уникальные перспективы для контроля и управления магнитным моментом в гибридных сверхпроводниковых системах, а также возникновение синхронизированной ступеньки в намагниченности под действием внешнего электромагнитного поля. Это открывает возможность управления синхронизированными ступенями сверхпроводящим током [22].

Таким образом, наше сотрудничество позволяет решать совместно актуальные задачи современной сверхпроводниковой электроники и спинтроники. Мы полагаем, что оно создаст основу для их развития в обеих странах.

## **1. ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ**

Внутренний эффект Джозефсона, заключающийся в туннелировании куперовских пар между смежными сверхпроводящими плоскостями  $\text{CuO}_2$  внутри сильноанизотропных слоистых высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), дает основания рассматривать ВТСП как систему связанных джозефсоновских переходов [50, 51]. Внутренний эффект Джозефсона является составной частью многих теорий ВТСП и имеет первостепенное значение для определения вольт-амперных характеристик (ВАХ) туннельных структур на основе ВТСП и свойств вихревой решетки в данных материалах. В настоящее время внутреннее туннелирование является не

только интересным объектом, но также становится мощным инструментом для исследования природы ВТСП, транспорта вдоль стека сверхпроводящих слоев и физики вихрей и находит применение в сверхпроводниковой электронике. Широкие перспективы для различных применений представляет наблюдение достаточно мощного когерентного излучения из стека внутренних ДП (ВДП) [52]. Система связанных ДП (СДП) является моделью для исследования физических свойств ВДП в ВТСП, ее нелинейных свойств и различных неравновесных явлений. Системы джозефсоновских переходов демонстрируют многообразие резонансных свойств.

Открытие внутреннего эффекта Джозефсона создало новое направление исследований в сверхпроводимости и физике твердого тела. Фазовая динамика ВДП в ВТСП вызывает большой интерес из-за многообразия физических явлений, реализуемых в данных системах. Различный тип связи между переходами, возникающий в различных джозефсоновских структурах, определяют многообразие ВАХ, наблюдаемых в ВТСП. Вопрос о связи между ВДП в ВТСП, ее характере и величине остается одним из принципиальных вопросов современных исследований. Величина параметра емкостной связи различна в разных ВТСП и органических сверхпроводниках, т. е., фактически является перестраиваемой в этих системах. Поэтому представляет большой интерес систематическое исследование динамики системы с акцентом на зависимость фазовой динамики от величины параметра связи, от слабой связи до сильной. Поскольку энергия, необходимая для возбуждения локализованной вращательной моды в системе СДП, возрастает с ростом параметра связи, появляется возможность коллективного возбуждения нескольких вращательных мод. В результате при сильной связи между переходами нарушается эквидистантность ветвистой структуры. Детальное сопоставление рассчитанных и экспериментальных ВАХ ВДП в ВТСП до настоящего времени отсутствует.

Когерентное электромагнитное излучение системы ВДП в терагерцевом диапазоне частот, значительно превосходящее предыдущие результаты по мощности, открывает широкие возможности для различных приложений. Основные направления исследований здесь связаны с выяснением механизма этого излучения и поиском новых возможностей для дальнейшего увеличения его мощности, которая по последним данным составляет около 1 мВт на частоте 0,5 ТГц при использовании нескольких последовательно соединенных систем ВДП.

Электрические и магнитные свойства ВДП в ВТСП сильно нелинейны и определяются их фазовой динамикой. Фазовая динамика ВДП используется для объяснения механизма когерентного терагерцевого излучения [52–57]. Одним из наиболее ярких признаков эффекта Джозефсона в ВТСП является синхронизация джозефсоновских осцилляций каждого перехода к частоте внешнего электромагнитного излучения. Такая синхронизация приводит к возникновению на ВАХ ступенек при квантованных значениях напряжений  $V_n = n\hbar\omega/2e$ , называемых ступеньками Шапиро, где  $\omega$  — частота приложенного сигнала, а  $n$  является целым

числом [58, 59]. Отметим, что работа современных стандартов Вольта основана на использовании ступенек Шапиро.

## **2. ПРОЯВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ**

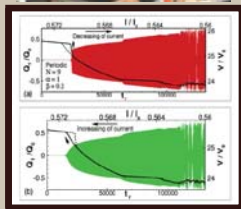
Как известно, одномерные модели со связью между переходами фиксируют основные черты реальных ВДП, такие как гистерезис и ветвление ВАХ, и помогают понять их физику. Интересным и важным фактом является то, что одномерные модели также могут быть использованы для описания свойств системы параллельно соединенных джозефсоновских переходов, которая часто рассматривается как модель для длинных джозефсоновских переходов. В частности, экспериментальные данные демонстрируют ряд резонансов на ВАХ. Они были проанализированы с использованием дискретной модели синус-Гордона (известной также как модель Френкеля–Конторовой) и ее обобщения, которое включает емкостное взаимодействие между соседними джозефсоновскими переходами [60, 61]. Предсказанные на основе теоретического анализа дискретного уравнения синус-Гордона параметрические неустойчивости одномерной системы параллельно соединенных  $N$  идентичных джозефсоновских переходов наблюдались экспериментально в работе [62]. В частности, новые резонансные ступеньки, связанные с параметрической неустойчивостью, были обнаружены на ВАХ дискретного джозефсоновского кольца.

Одними из первых в совместной научной работе со стипендиатом Махмудом Гаафаром были результаты, свидетельствующие о реализации в системе связанных ДП гистерезиса на ВАХ, обусловленного параметрическим резонансом [1]. Нами обнаружено, что в отличие от гистерезиса Мак-Камбера–Стюарта, величина резонансного гистерезиса обратно пропорциональна параметру Мак-Камбера и зависит от величины параметра связи и граничных условий. Исследование временной зависимости электрического заряда на сверхпроводящих слоях показывает, что происхождение резонансного гистерезиса связано с различной фазовой динамикой в процессе уменьшения и увеличения базового тока в резонансной области. На рис. 4, где представлена временная зависимость заряда вместе с ВАХ для стека с 9 ДП, мы видим характерную тонкую структуру с соответствующими особенностями на временной зависимости. Заряд на сверхпроводящем слое при увеличении тока исчезает при другом его значении, в отличие от случая уменьшения тока (рис. 4).

Интересной особенностью ВДП является наличие продольной плазменной волны (ППВ), распространяющейся вдоль стека переходов [63, 64]. Это следует из того, что толщина S-слоев сравнима с дебаевской длиной экранирования  $r_D$ , поэтому полного экранирования электрического заряда в отдельном S-слое не происходит. Частота джозефсоновских осцилляций  $\omega_J$  определяется напряжением на переходе, а при  $\omega_J = 2\omega_{LPW}$  ( $\omega_{LPW}$  — частота ППВ) реализуется параметрический резонанс: джозефсоновские осцилляции возбуждают ППВ своим периодическим воздействием на си-



## Calculation of the plasma frequency of a stack of coupled Josephson junctions irradiated with electromagnetic waves



A manifestation of a resonance-type hysteresis related to the parametric resonance in the system of coupled Josephson junctions is demonstrated. Investigation of the time dependence of the electric charge in superconducting layers allows us to explain the origin of this hysteresis by different charge dynamics for increasing and decreasing bias current processes. We find a strong effect of the dissipation in the system on the amplitude of the charge oscillations at the resonance.



Yu.Shukrinov and M.Gaafar Phys. Rev. B. 84, 094514(2011)

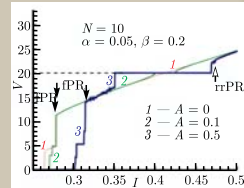
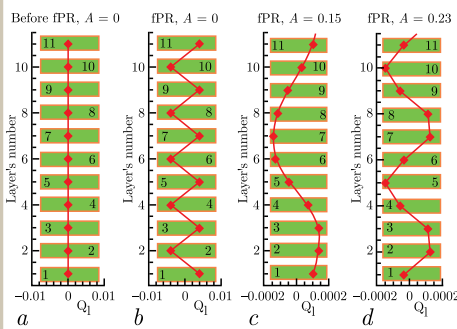
Рис. 4. Об открытии нового типа гистерезиса в системе связанных джозефсоновских переходов [1]

стему. Было показано, что ВАХ ВДП демонстрирует ветвистую структуру, имеет точку излома и некоторую область в ее окрестности (BPR) на верхней ветви перед переходом на внутреннюю ветвь [1, 65–67].

Следующей работой со стипендиатом Махмудом Гаафаром было исследование фазовой динамики в ВТСП при наличии внешнего электромагнитного излучения [4]. Нами наблюдалось возникновение электрического заряда в сверхпроводящих слоях в интервале базового тока, соответствующего ступеньке Шапиро. Была продемонстрирована возможность изменения длины ППВ под действием внешнего электромагнитного излучения в условиях параметрического резонанса. Было показано, что двойной резонанс джозефсоновских осцилляций с внешним излучением и плазменными колебаниями приводит к дополнительному параметрическому резонансу и небесселевской зависимости ширины ступеньки Шапиро от частоты и амплитуды внешнего излучения.

На рис. 5, а показаны три ВАХ стека с 10 связанными ДП: без излучения (кривая 1); при наличии внешнего излучения с частотой  $\omega = 2$  и амплитудой  $A = 0,1$  (кривая 2); с амплитудой  $A = 0,5$  (кривая 3). Параметрический резонанс в отсутствие внешнего излучения мы называем фундаментальным параметрическим резонансом (fPR). При выбранных нами значениях параметров этот резонанс реализуется при значении тока в точке излома  $I_{bp} \approx 0,28$  и напряжении  $V_{bp} \approx 11,51$ , соответствующего

## Demonstration of changing of LPW wavelength with an increase of the amplitude of radiation.



Yu.M.Shukrinov, I.Rahmonov, M. Gaafar,  
Phys.Rev.B, 86, 184502 (2012)

Рис. 5. Демонстрация в работе [4] возможности изменения длины волны ППВ внешним излучением. На рисунке приведен пример такого изменения при увеличении амплитуды внешнего излучения. Показаны ВАХ стека с 10 связанными ДП без излучения и с излучением разной амплитуды

джозефсоновской частоте  $\omega_J \simeq 1,151$ . При увеличении амплитуды излучения область параметрического резонанса сдвигается вверх вдоль оси напряжений. В соответствии с частотой внешнего излучения  $\omega = 2$  первая ступенька Шапиро наблюдается при напряжении  $V = \omega_J N = 20$ . Пунктирная линия подчеркивает этот факт. Закрашенные стрелки указывают положение fPR. Полые стрелки указывают область параметрического резонанса, обусловленного излучением (gfPR).

Нами обсуждалось влияние увеличения амплитуды внешнего излучения на длину ППВ в области fPR. Найдено, что изменение амплитуды меняет длину ППВ, возникающей при параметрическом резонансе. Этот эффект при  $\omega = 2$  показан на рис. 5, a-d. В отсутствие излучения в S-слоях до резонанса нет заряда (рис. 5, a). При резонансе (рис. 5, b) формируется ППВ с волновым числом  $k = \pi$  ( $\lambda = 2d$ ). При  $A = 0,14$  длина ППВ изменяется. На рис. 5, c показано распределение заряда вдоль стопки, формирующей волну с  $\lambda = 10d$ . При  $A = 0,23$  длина ППВ становится равной  $\lambda = 5d$ , как показано на рис. 5, d.

Результаты детального исследования при  $\omega = 2$  в интервале амплитуд (0, 0,35) суммированы на рис.6, a. Таким образом, в случае фундамен-

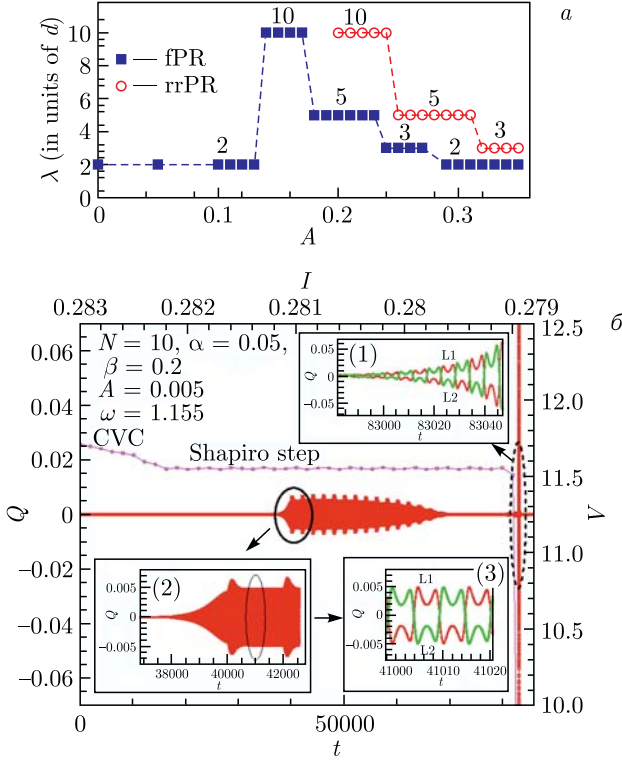


Рис. 6. Изменение длины ППВ при параметрическом резонансе и демонстрация возникновения заряда в сверхпроводящем слое ВТСП

тального параметрического резонанса нами зарегистрированы следующие изменения длины ППВ:  $\lambda = 2d \Rightarrow \lambda = 10d \Rightarrow \lambda = 5d \Rightarrow \lambda = 3d \Rightarrow \lambda = 2d$ . Увеличение  $A$  также меняет длину ППВ в области параметрического резонанса, обусловленного излучением:  $\lambda = 10d \Rightarrow \lambda = 5d \Rightarrow \lambda = 3d$  при увеличении  $A$  от нуля до 0,35. Как отмечалось выше, внешнее излучение может также приводить к появлению электрического заряда на сверхпроводящих слоях в интервале базового тока, соответствующего ступеньке Шапиро на ВАХ. В области двойного резонанса, когда частота джозефсоновских осцилляций совпадает с частотами внешнего излучения и продольных плазменных осцилляций, в системе возникает дополнительный резонанс со специфической зависимостью ширины ступенек Шапиро от амплитуды внешнего излучения. В нашем случае это наблюдается при  $\omega \simeq 1,155$ , тогда как фундаментальный параметрический резонанс без излучения, как указывалось выше, реализуется при  $\omega_J = 1,151$ . Амплитуда осцилляций заряда и интервал базового тока увеличиваются при приближении к условию двойного резонанса. Рис. 6, *b* демонстрирует возникновение заряда на слое при  $\omega = 1,155$ . На вставке (3) видно, что осцилляции заряда соответствуют  $\pi$ -моду ППВ. Осцилляции заряда в области фундаментального параметри-

ческого резонанса также соответствуют  $\pi$ -моду. Однако, в принципе, нет ограничений на рождение ППВ с другим волновым числом при других параметрах системы [4].

### 3. ВОЛНЫ ЗАРЯДОВОЙ ПЛОТНОСТИ


Как упоминалось выше, одним из интересных объектов в джозефсоновских наноструктурах являются плазменные волны. В совместной работе с Н. Abdelhafiz (рис. 7) нами продемонстрировано возникновение волн зарядовой плотности вдоль стека связанных джозефсоновских переходов в слоистых сверхпроводниках [6]. Показана трансформация ППВ в волну зарядовой плотности (ВЗП), а также переходы между ВЗП различного типа. Влияние внешнего электромагнитного излучения на состояния, соответствующие ВЗП, кардинально отличается от случая одиночного ДП. Нами показано, что значения напряжений ступенек Шапиро в ДП вдоль стека не отражают непосредственно частоту внешнего излучения, а соответствуют распределению вращающихся и осциллирующих джозефсоновских переходов в системе. На рис. 8 показано распределение заряда вдоль стека, демонстрирующее продольные плазменные волны и волны зарядовой плотности. Наши результаты демонстрируют богатую физику ВЗП в ВДП.

## Charge density waves in the layered systems

**a** One JJ in oscillating state


$$Q_l = Q_0 \alpha (V_{l+1} - V_l)$$

$$Q_0 = \epsilon \epsilon_0 V_0 / r_D^2$$



We demonstrate the creation of a charge density wave (CDW) along a stack of coupled Josephson junctions (JJs) in layered superconductors. The transformation of a longitudinal plasma wave to CDW and transitions between different types of CDW's are shown.

**b** Two neighbor JJs in oscillating state

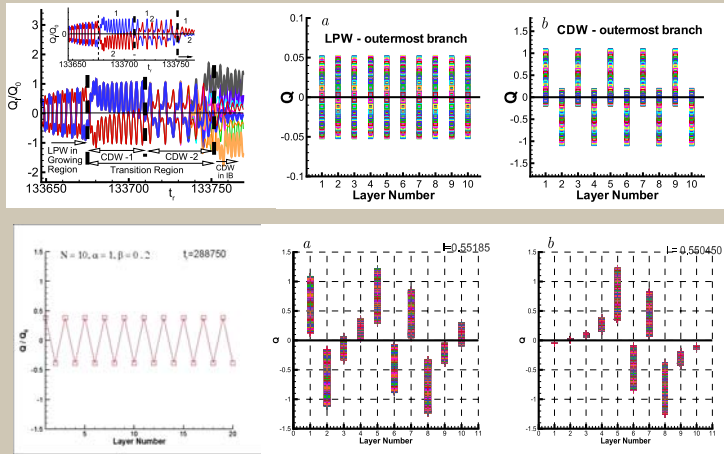


**c** Two separated JJs in oscillating state

Yu. M. Shukrinov and H. Abdelhafiz. JETP Letters, 98, 551–556, 2013

Рис. 7. Демонстрация распределений заряда вдоль стека с вращающимися и осциллирующими джозефсоновскими переходами

## Longitudinal waves in intrinsic Josephson junctions



Transformations: LPW  $\rightarrow$  CDW, CDW  $\rightarrow$  CDW

Рис. 8. Возможность взаимной трансформации продольной плазмы волны и волны зарядовой плотности в стеке с 10 связанными джозефсоновскими переходами [6]

Переход с верхней ветви ВАХ (со всеми ДП во вращающемся состоянии) на внутреннюю ветвь обусловлен трансформацией ППВ в бризерную ВЗП.




## 4. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ

Неравновесные эффекты в слоистых материалах, создаваемые инъекцией стационарного тока, интенсивно изучаются в последние годы [68–73]. Слоистая система из  $N + 1$  сверхпроводящего слоя образует стек джозефсоновских переходов. Поскольку 0-й и  $N$ -й слои соприкасаются с нормальным металлом, их толщины  $d_s^0$  и  $d_s^N$  отличаются от толщины остальных  $S$ -слоев  $d_s^l$  внутри стека из-за эффекта близости. Действительно, система ВДП в высокотемпературных сверхпроводниках не может находиться в равновесном состоянии ни при каком значении электрического тока [63, 74]. Изучение неравновесных явлений в системе связанных джозефсоновских переходов — один из наиболее сложных разделов теории высокотемпературной сверхпроводимости, окончательная форма которой еще не разработана. Влияние связи между переходами на джозефсоновские плазменные колебания подчеркивалось в работах [63, 71–75]. В совместной работе с стипендиатом Маджедом Нашатом мы исследовали эффекты стационарного и нестационарного зарядового разбаланса в стеке ВДП.

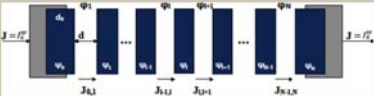
Проведено численное исследование ВАХ джозефсоновских переходов с емкостной связью при внешнем облучении. Обнаружено влияние разбаланса заряда на ступеньку Шапиро. Ступенька Шапиро демонстрирует конечный наклон и отклонение от своего канонического значения. Значения сдвига и наклона зависят от времени релаксации квазичастиц и толщины сверхпроводящего слоя. Мы показали, что по наклону ступеньки Шапиро можно найти время релаксации квазичастиц и что связь между переходами приводит к распределению величины наклона вдоль стека. Смещение ступеньки Шапиро от ее канонического положения определяется частотой внешнего излучения. Этот факт делает неоднозначной интерпретацию П. Мюллером экспериментально обнаруженного смещения ступеньки Шапиро из-за эффекта разбаланса заряда [75].

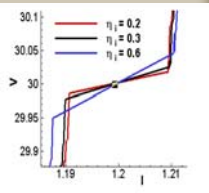
Стационарный эффект зарядового разбаланса в системе связанных джозефсоновских переходов исследовался в работе [11] (см. рис. 9). Показано, что дисбаланс стационарного заряда в резистивном состоянии приводит к уменьшению джозефсоновской частоты в переходах стека. Образующаяся разность частот приводит к неравномерному переключению переходов вдоль стека на ступенчатый режим Шапиро при наличии внешнего электромагнитного излучения. С другой стороны, такое неравномерное переключение приводит к появлению всплесков напряжения на ВАХ стека.

### Effect of Charge Imbalance on Shapiro Step in Intrinsic Josephson Junctions

We demonstrate that the charge imbalance is responsible for a slope in the Shapiro step in the IV-characteristic. The value of slope increases with a nonequilibrium parameter. Coupling between junctions leads to the distribution of the slope's values along the stack.





*Yu. M. Shukrinov, M. Nashaat, K. V. Kulikov, R. Dawood, H. El Samman and Th. M. El Sherbini, EPL 115, 2, (2016).*

Рис. 9. Демонстрация наклона ступеньки Шапиро при различных параметрах неравновесности, описанного в работе [11] для системы из пяти связанных ДП при внешнем электромагнитном излучении с амплитудой  $A = 0,1$  и частотой  $\omega = 0,5$

Показано, что дисбаланс стационарного заряда является причиной наклона ступеньки Шапиро из-за разности неравновесных потенциалов на краях ступеньки.

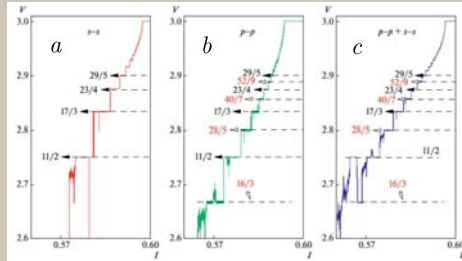
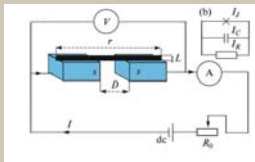
## 5. ПРОЯВЛЕНИЯ МАЙОРАНОВСКИХ СОСТОЯНИЙ НА ВАХ ДП И НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ СКВИДОВ

В совместной работе с Радвой Давуд обнаружены интересные свойства джозефсоновского перехода с  $2\pi$ - и  $4\pi$ -периодическими компонентами сверхпроводящего тока. В области малых напряжений такой переход имеет  $4\pi$ -периодичность разности фаз при амплитуде майорановского тока, много меньшей, чем джозефсоновский ток, что позволяет наблюдать джозефсоновские осцилляции тока с дробным периодом при малых диссипациях  $\beta < 1$  в области гистерезиса. Влияние  $4\pi$ -периодической майорановской компоненты тока проявляется также в изменении последовательности ступеней лестничной структуры, возникающей на ВАХ перехода. Нами был определен интервал амплитуд внешнего электромагнитного излучения, в котором наиболее существенно проявление дробного эффекта Джозефсона на ВАХ.

На рис. 10 показаны различные лестничные структуры, появляющиеся на ВАХ. Лестничная структура для обычного джозефсоновского перехода с амплитудой  $A = 0,8$  и частотой  $\omega = 0,5$  показана на рис. 10, *a*. Порядок образования ступенек в такой структуре можно описать непрерывной дробью  $V = (N + 1/n)\omega$ , в то время как последовательность, возникающая в соединении, поддерживающем майорановские связанные состояния, описывается соотношением  $V = (N + 2/n)\omega$  (см. рис. 10, *b*). Как отмечено в [76], изменения, возникающие в лестничных структурах, можно трактовать как проявление майорановских состояний в стеке. Из рис. 10, *c* видно, что переход с двумя сверхпроводящими компонентами тока демонстрирует последовательность ступенек, которая описывается непрерывной дробью  $V = (N + 2/n)\omega$ . Следовательно, несмотря на малое значение амплитуды майорановской компоненты  $\gamma = 0,316$ , лестничная структура такого перехода отражает  $4\pi$ -периодичность. Таким образом, последовательность шагов на кривой ВАХ является универсальным методом обнаружения майорановских фермионов в емкостно-шунтированном джозефсоновском переходе.

В случае сверхпроводниковых квантовых интерференционных устройств (СКВИДов) с нетривиальными барьерами соответствующая резонансная ветвь имеет сдвиг напряжения, который также можно использовать для обнаружения майорановских фермионов. Представлены результаты численного исследования фазовой динамики СКВИДа постоянного тока с топологически тривиальными и нетривиальными барьерами. В наших расчетах мы учитывали две составляющие сверхпроводящего тока, токи куперовских пар ( $2\pi$ -периодические) и майорановские фермионы ( $4\pi$ -периодические). Была найдена зависимость обратного тока от магнитного поля. Показано, что в случае двухкомпонентного сверхпро-

## Josephson Junction and SQUID with Topologically Nontrivial Barriers



K. V. Kulikov, R. Dawood, E. P. Nakhmedov, and Yu. M. Shukrinov  
JETP, 125, 2, (2017).

I. R. Rahmonov, Yu. M. Shukrinov, R. Dawood, H. El Samman.  
Low temperature physics 43, 7, (2017).

Рис. 10. Лестничные структуры на ВАХ джозефсоновского перехода с полупроводниковым проводом при внешнем излучении с частотой  $\omega = 0,5$ , найденные в работе [14]

входящего тока наблюдается периодичность зависимости обратного тока от магнитного поля, смещенного куперовскими парами, и майорановского фермионного отношения по магнитному полю. Этот эффект позволяет экспериментально определить соотношение токов куперовских пар и майорановских фермионов.

## 6. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ШУНТИРОВАННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ СТРУКТУРАХ

Шунтирование джозефсоновских структур приводит к возникновению дополнительных резонансов и открывает новые возможности в управлении их свойствами. В совместной работе [12] с д-ром. A. S. Abouhasna нами исследованы вольт-амперные характеристики и фазовая динамика внутренних джозефсоновских переходов, шунтированных индуктивными и емкостными элементами. Были продемонстрированы двойной и тройной резонансы и исследовано их влияние на возникновение электрического заряда на сверхпроводящих слоях. Мы показали, что для большего числа переходов шунтирование вызывает возникновение заряда в состояниях, соответствующих верхней и резонансной ветвям вольт-амперной характе-



## Shunted stack of JJs layered superconductors: effect of number of junctions on Double resonance and charging of superconducting layers

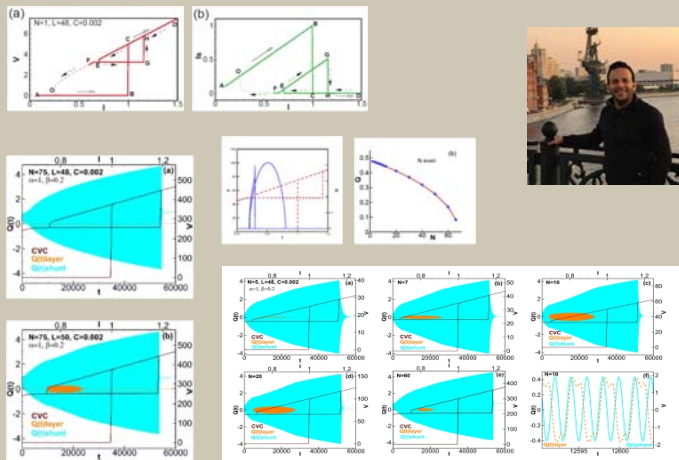


FIG. 2. Charge in  $N$  layers (dark-orange) and in shunted capacitor (light-blue) together with corresponding part of IV characteristic including the re-branch, in stacks with different numbers of JJs, all with  $C = 0.002$  and  $L = 48$ .

Yu. M. Shukrinov, A. E. Botha, and A. S Abouhaswa,  
Physics Letters A, 387, 127025, 2021

Рис. 11. Демонстрация возникновения электрического заряда в сверхпроводящих слоях в LC-шунтированном стеке связанных джозефсоновских переходов

ристики. В системе наблюдается преобразование бегущей волны в стоячую продольную плазменную волну.

## 7. ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУР СВЕРХПРОВОДНИК–ФЕРРОМАГНЕТИК–СВЕРХПРОВОДНИК

Джозефсоновский переход с ферромагнетиком в качестве барьера является объектом, где пересекаются сверхпроводимость и магнетизм [77]. В этих переходах сверхток индуцирует динамику намагниченности за счет связи между джозефсоновской и магнитной подсистемами. Возможность управления магнитными свойствами с помощью сверхпроводящего тока, и в свою очередь, управления сверхпроводящим током посредством магнитной системы привлекает большое внимание [23, 77–83]. Соотношение ток–фаза в переходах сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник чувствительно к ориентации намагниченности в F-слое [84, 85].

В совместной работе со стипендиатом Маджедом Нашаатом мы исследовали спинтронные эффекты в джозефсоновских структурах с ферромагнетиком. Было исследовано проявление различного типа связи между намагниченностью и джозефсоновской фазой при возникновении субгармонических ступеней, образующих лестничную структуру [86–89] на

ВАХ джозефсоновского перехода с большой диссипацией. Возникновение лестничных структур — универсальное явление и обнаруживается в самых разных системах, включая спиновые цепочки с дальнедействующими взаимодействиями [90], фрустрированные квазидвумерные спин-димерные системы в магнитных полях [91], а также при дробном квантовом эффекте Холла [92].

Нами исследовано влияние связи между сверхпроводящим током и намагненностью в джозефсоновском переходе сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник в циркулярно поляризованном магнитном поле. Продемонстрирована возможность проявления ферромагнитного резонанса на частотной зависимости амплитуды намагненности и средней критической плотности тока. На вольт-амперных характеристиках обнаружены субгармонические лестничные структуры, обусловленные влиянием динамики намагненности на разность фаз в джозефсоновском переходе, которые следуют алгоритму непрерывной дроби. Динамика системы описывается обобщенной моделью RCSJ, связанной с уравнением Ландау–Лифшица–Гильберта. Приведено аналитическое обосновывание возникновения дробных ступенек на ВАХ джозефсоновского перехода сверх-

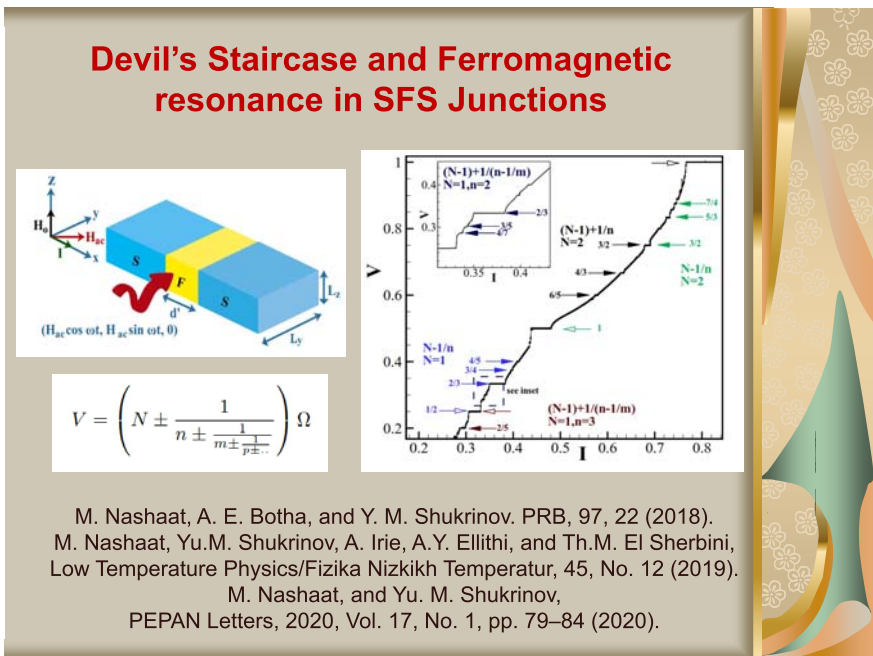


Рис. 12. Геометрия джозефсоновского СФС-перехода в однородном магнитном поле  $H_0$  и циркулярно поляризованном магнитном поле  $H_{ac}$ , рассмотренная в работе [16]. Вольт-амперная характеристика демонстрирует лестничную структуру, следующую формуле цепной дроби

проводник–ферромагнетик–сверхпроводник. Было высказано предположение, что субгармонические лестничные структуры могут быть использованы для регистрации майорановских состояний в джозефсоновских наноструктурах. В работе [93] сообщалось о экспериментальном наблюдении полуцелых ступеней Шапиро в ферромагнитном джозефсоновском переходе (Nb–NiFe–Nb) посредством исследования соотношения ток–фаза при радиочастотном микроволновом возбуждении.

Мы рассмотрели два сверхпроводника, разделенных ферромагнитным слоем толщиной  $d$  с площадью перехода  $L_y L_z$ , током смещения в направлении оси  $x$ , как показано на рис. 12. Одноосное постоянное магнитное поле  $H_0$  приложено в направлении  $z$ , а магнитное поле круговой поляризации  $\mathbf{H}_{ac} = (H_{ac} \cos \omega t, H_{ac} \sin \omega t, 0)$  с амплитудой  $H_{ac}$  и частотой  $\omega$  приложено в плоскости  $xy$ . Связь между джозефсоновской фазой и намагниченностью в переходах сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник (S/F/S) играет важную роль в динамике этой системы. Показано проявление ферромагнитного резонанса в динамике намагниченности и критического тока как в нелинейной, так и в линеаризованной схемах. На ширину линии ферромагнитного резонанса и положение резонансной частоты сильно влияет соотношение джозефсоновской и магнитной энергий.

На ВАХ (рис. 13, *a*) показаны ступеньки тока при  $V = m\Omega_0$  с целым  $m$ , а также некоторые дробные ступеньки. В случае обычных ДП ширина первой ступеньки Шапиро больше второй. В нашем же случае мы видим, что ширина первой ступеньки значительно меньше ширины второй. Т.о., ширина гармоник различна для четных и нечетных  $m$ : большие ступеньки при четных  $m$ , меньшие при нечетных  $m$ . В нашем случае с учетом джозефсоновской энергии в эффективном поле мы получили дополнительные ступеньки Шапиро с нечетными и дробными значениями  $m$ , как это видно на рис. 13, *a*. Структуру этих дробных ступенек можно прояснить путем анализа их положения на шкале напряжения с использованием алгоритма, основанного на обобщенной формуле цепной дроби [87–89]:

$$V = \left( N \pm \frac{1}{n \pm \frac{1}{m \pm \frac{1}{p \pm \dots}}} \right) \Omega, \quad (1)$$

где  $N, n, m, p, \dots$  — натуральные числа. Синхронизация джозефсоновских осцилляций и магнитной прецессии происходит за счет вклада дополнительных членов ( $\Gamma_{yz} \varepsilon_J \cos \theta, \Gamma_{zy} \varepsilon_J \cos \theta$ ) в эффективное поле. Рис. 13, *b* и *в* демонстрируют увеличенные части ВАХ, показанные на рис. 13, *a*. Между  $V = 0$  и  $V = 0,5$  существуют дробные ступеньки Шапиро, которые можно описать непрерывными дробями второго уровня [87]  $(N - 1) + 1/n$  и  $N - 1/n$  с  $N = 1$  в обоих случаях (см. рис. 13, *b*). Кроме того, проявляются две цепные дроби третьего уровня  $(N - 1) + 1/(n - 1/m)$  с  $N = 1, n = 2$

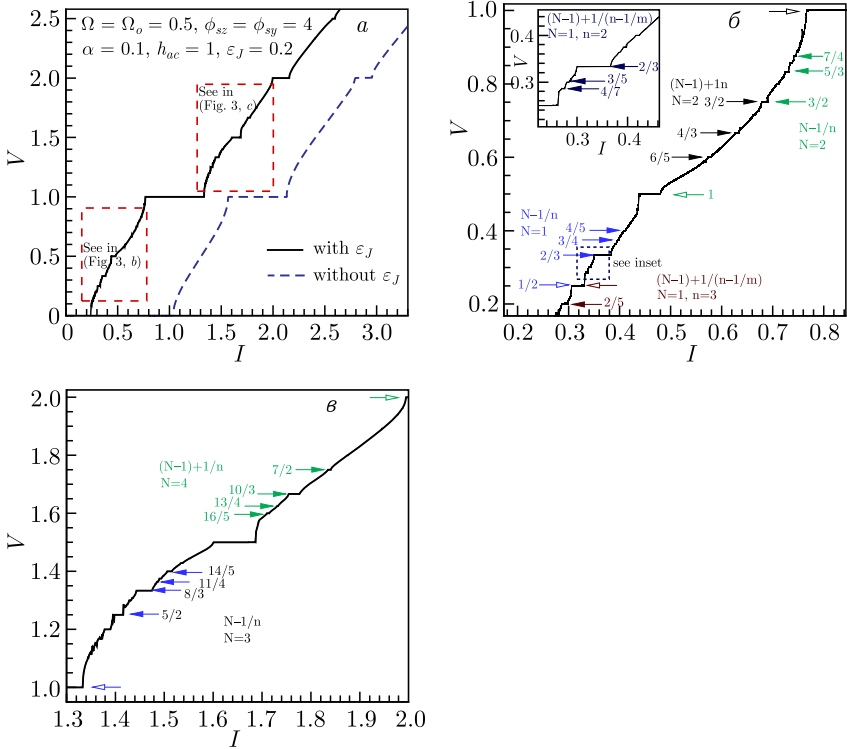
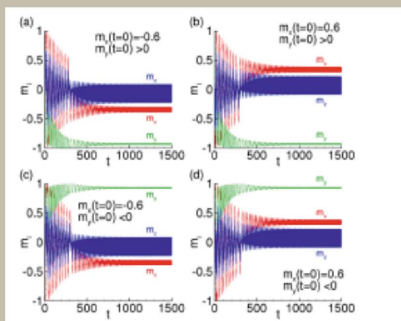
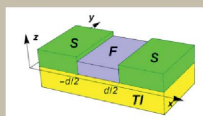


Рис. 13. Лестничные субгармонические структуры на различных участках вольт-амперной характеристики СФС-перехода при ферромагнитном резонансе

(показаны на вставке) и  $n = 3$ . Ступеньки между  $V = 0,5$  и  $V = 1$  следуют цепным дробям второго уровня  $(N - 1) + 1/n$  и  $N - 1/n$  с  $N = 2$  в обоих случаях. На рис. 13, в ясно видно проявление непрерывной дроби второго уровня  $N - 1/n$  с  $N = 3$  и  $(N - 1) + 1/n$  с  $N = 4$  между  $V = 1$  и  $V = 2$ .

Сильная зависимость джоузефсоновской энергии от ориентации намагниченности в джоузефсоновских переходах с ферромагнитными слоями и спин-орбитальной связью открывает возможность управления намагниченностью джоузефсоновским током или джоузефсоновской фазой. Нами изучены перспективы управления намагниченностью в SFS джоузефсоновских переходах на поверхности трехмерного топологического изолятора, содержащего дираковские квазичастицы (см. рис. 14). Из-за синхронизации спин-импульса этих дираковских квазичастиц соотношение ток-фаза Джоузефсона сильно зависит от ориентации намагниченности. Это приводит к расщеплению легкой оси ферромагнетика при приложении напряжения. Такое расщепление может привести к стабилизации нетрадиционного четырехкратно вырожденного ферромагнитного состояния.

## Electrical control of magnetization in SFS JJs on a 3D topological insulator



Due to the spin-momentum locking of Dirac quasiparticles, a strong dependence of the Josephson current-phase relation on the magnetization orientation is realized. This can lead to splitting of the ferromagnet's easy axis in the voltage driven regime. Such a splitting can lead to stabilization of an unconventional fourfold degenerate ferromagnetic state.

M. Nashaat, I. V. Bobkova, A. M. Bobkov, Yu. M. Shukrinov, I. R. Rahmonov, and K. Sengupta. Phys. Rev. B 100, 054506 (2019)

Рис. 14. Эскиз системы, рассмотренной в работе [18]. Поверх топологического изолятора нанесены сверхпроводящие выводы и ферромагнитная прослойка. На рисунке показана временная эволюция намагниченности, начиная с различных начальных условий, соответствующих четырем возможным стабильным состояниям

## 8. ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ ПЕРЕХОД/НАНОМАГНЕТИК

Другой подход к исследованию взаимодействия между магнитной и сверхпроводящей системами был представлен в работах [94, 95], где рассматривалась электромагнитная связь наномангнетика с джозефсоновским переходом. Был исследован переворот однодоменной магнитной частицы переменным полем. Сверхпроводящий ток ДП, связанного с наномангнетиком, приводимым в действие зависящим от времени магнитным полем, подробно исследован в работе [96]. Продемонстрировано возникновение шапироподобных ступенек на ВАХ ДП.

Как указывалось выше, П. Л. Капица показал возможность изменения состояния равновесия механического маятника за счет быстрых колебаний его точки подвеса. В работе [97] авторы экспериментально реализовали маятник Капицы в микрометровом масштабе, используя коллоидную частицу, взвешенную в воде и захваченную оптическим пинцетом. Кроме того, аналитически и экспериментально было показано, что при изменении направления колебаний точки подвеса маятника во времени может проис-

ходить изменение точки равновесия маятника. Квантовый маятник Капицы можно стабилизировать в виде квантовых состояний вблизи локального минимума эффективной потенциальной энергии [98].

Нами продемонстрировано проявление свойств маятника Капицы в системе «джозефсоновский переход + наномангнит», где под действием осциллирующего сверхпроводящего тока изменяется направление легкой оси наномангнита [19]. Хотя магнитное поле, индуцированное сверхпроводящим током в джозефсоновском переходе, очень слабое, приложенное напряжение может генерировать нелинейную динамику наномангнетика, что приводит к ряду интересных явлений. Было показано, что легкая ось наномангнетика переориентируется при увеличении отношения джозефсоновской энергии к магнитной, а также параметра связи джозефсоновского тока с магнитным моментом и частоты джозефсоновских осцилляций.

В нашем сотрудничестве с Маджедом Нашаатом проводилось моделирование магнитной прецессии наномангнита в структуре «джозефсоновский переход/наномангнит», возникающей за счет взаимодействия с сверхпроводящим током. Рассматривался наномангнит с магнитным моментом  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ , находящийся на расстоянии  $\mathbf{r}_M = a\mathbf{e}_x$  от центра короткого джозефсоновского перехода длины  $l$ , как показано на рис. 15, а.

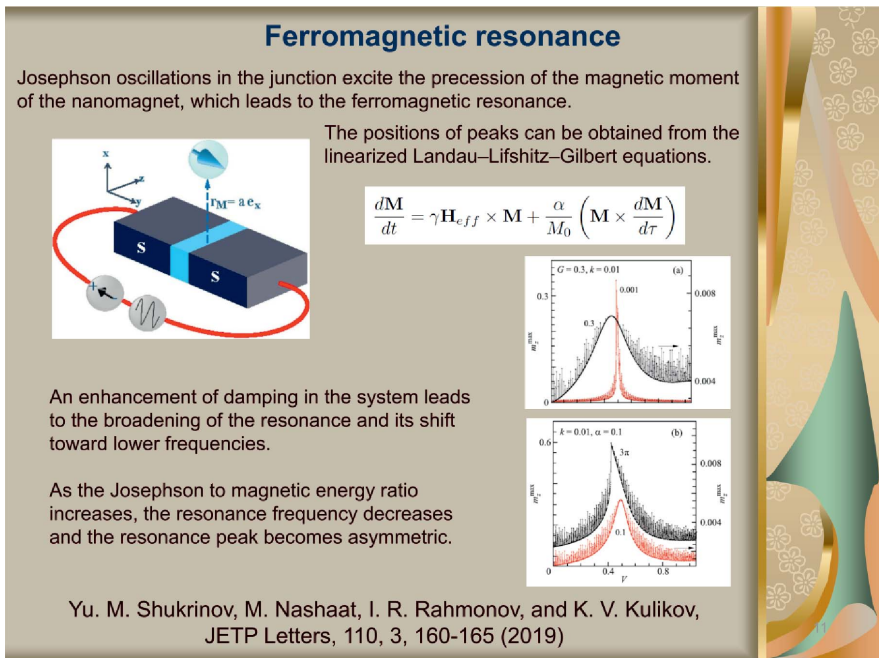


Рис. 15. Проявление ферромагнитного резонанса на зависимости  $m_z^{\max}(V)$  при различных значениях гильбертова затухания  $\alpha = 0,001$  и  $0,3$  и двух различных значениях отношения джозефсоновской энергии к энергии наномангнетика ( $G = 0,1$  и  $3\pi$ )

Взаимодействие между двумя системами, сверхпроводниковой и магнитной, считается чисто электромагнитным. Магнитное поле наномангнетика изменяет джозефсоновский ток, протекающий через переход, в то время как магнитный поток, создаваемый джозефсоновским переходом, воздействует на магнитный момент наномангнетика [94]. На рис. 15 показана рассчитанная максимальная амплитуда намагниченности в зависимости от напряжения  $V$  джозефсоновского перехода при  $\Omega_F = 0,5$  и двух значениях параметра затухания Гильберта  $\alpha = 0,001$  и  $0,3$ . В выбранной нормировке  $V = \Omega_J$  пик ферромагнитного резонанса наблюдается при напряжении, соответствующем джозефсоновской частоте  $\Omega_J = 0,5$ . Увеличение затухания Гильберта в системе приводит к уширению резонанса и его смещению в сторону более низких частот, что видно на рис. 15 при  $\alpha = 0,3$ . Положения пиков при слабом затухании хорошо согласуются с частотами, вытекающими из аналитических формул, полученных линеаризацией уравнений Ландау–Лифшица–Гильберта.

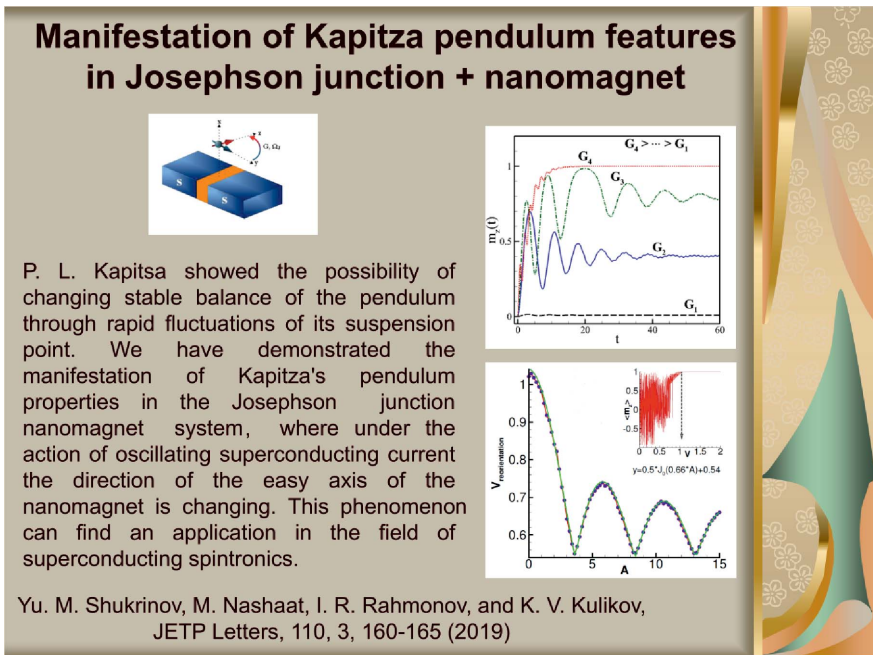


Рис. 16. Динамика намагниченности  $m_z$  наномангнетика в зависимости от отношения  $G$  джозефсоновской энергии к магнитной, демонстрирующая его переориентацию. На нижней вставке показано напряжение переориентации в зависимости от амплитуды  $A$  внешнего переменного сигнала. Показана усредненная составляющая намагниченности  $m_z$  наномангнетика в зависимости от постоянного напряжения

Приложенное к джозефсоновскому переходу напряжение генерирует высокочастотное магнитное поле, которое переориентирует магнитный момент наномангнетика. На рис. 16 показана переориентация магнитного момента в зависимости от постоянного напряжения смещения, т.е. наблюдается проявление свойств маятника Капицы в системе джозефсоновский переход/наномангнит. Стабилизация динамики компонент магнитного момента происходит при  $M = (0, 0, 1)$ , когда  $V$  превышает некоторое значение  $V_T$ , т.е., возникает полная переориентация магнитного момента.

Важные результаты получены при аналитическом исследовании системы ДП/наномангнит в сотрудничестве с Мохамедом Самехом. Получены простые аналитические формулы, определяющие устойчивое положение наномангнита как при внешнем периодическом воздействии, так и без него (см. рис. 17). Также продемонстрировано влияние внешнего периодического воздействия на напряжение полной переориентации магнитного момента наномангнита. Другим важным результатом стала демонстрация перемагничивания наномангнетика импульсом тока [19], что открывает новые перспективы для применения этой системы в сверхпроводниковой спинтронике. Также были исследованы хаотические свойства, и результаты представлены к опубликованию в журнале «Chaos».

## Kapitza Pendulum in SFS junction

LLG equations in spherical form are given by:

$$\dot{\theta} = -\frac{\Omega_F}{(1 + \alpha^2)} \frac{\sin \theta}{(1 - \frac{\Omega_F \cos^2 \theta}{\Gamma \sin^2 \theta})} [\alpha \dot{\phi} - \sin \theta \cos \phi + \alpha \cos \theta \sin \phi]$$

$$\dot{\phi} = \frac{\Omega_F}{\alpha^2 + 1} \frac{1}{\Gamma \sin^2 \theta} \left[ k_x - (-\sin^2 \theta \cos \phi \Omega_F + \sin \theta \cos \theta - \alpha \cos \phi) \sin(\phi) \right]$$

Here we separate  $\theta$  and  $\phi$  into fast and slow variables by introducing the notations  
 $\theta \equiv \Theta + \xi$  and  $\phi \equiv \Phi + \zeta$

Here,  $\Theta$  and  $\Phi$  describe the "slower" motion, relevant on longer time scales, whereas the variables  $\xi$  and  $\zeta$  describe the "fast" oscillations of the system.


Stability position in the case without periodic drive (when  $A = 0$ ) are given by:

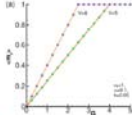
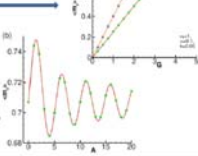
$\Phi = \pi/2 \quad \text{or} \quad \Phi = 3\pi/2$

$$\langle m_x \rangle = \cos \Theta = eV + \frac{\alpha^2 k \sin^2 \Theta \Omega_F}{2V(1 + \alpha^2 + \delta \alpha k \sin^2 \Theta \Omega_F)^2}$$

Stability under external drive and the zeroth order resonances (when  $V + m_x \Omega = 0$ )

$\cos \Theta = eV - \epsilon \text{sign}^{m_x} \langle m_x \rangle J_m \left( \frac{A}{\Omega} \right) \sin(k \cos \Theta)$



K. V. Kulikov, D. V. Anghel, A. T. Preda, M. Nashaat, M. Sameh, Yu. M. Shukrinov, Phys. Rev. B 105, 094421, (2022).

Рис. 17. Аналитическое описание проявления свойств маятника Капицы в СФС джозефсоновском переходе [20]



## 9. СИНХРОНИЗАЦИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ И ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ПРИ ФЕРРОМАГНИТНОМ РЕЗОНАНСЕ В $\varphi_0$ -ПЕРЕХОДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В последнее время наше сотрудничество было сосредоточено на феномене синхронизации в  $\varphi_0$ -переходе. Совместно с Сарой Абдельмонейм мы получили интересные результаты по синхронизации магнитной динамики в  $\varphi_0$  ДП под действием внешнего электромагнитного излучения (рис. 18). Мы продемонстрировали синхронизацию намагниченности и джозефсоновских осцилляций при ферромагнитном резонансе и показали, что синхронизация магнитной прецессии происходит через синхронизацию джозефсоновских осцилляций. Это приводит к ступеньке на зависимости намагниченности от тока смещения. Положение ступеньки определяется частотой излучения и формой резонансной кривой. В переходах с сильной спин-орбитальной связью на ВАХ появляются состояния с отрицательным дифференциальным сопротивлением, что приводит к дополнительным ступенькам на ВАХ. Мы показали, что соответствующие осцилляции имеют ту же частоту, что и осцилляции на первой ступеньке, но дру-

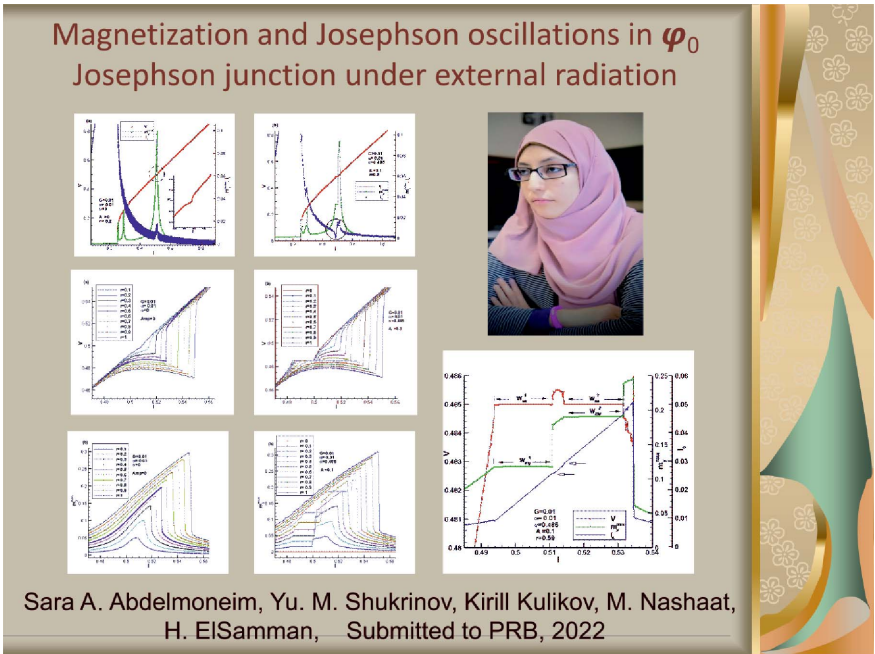


Рис. 18. Демонстрация синхронизации магнитной прецессии через синхронизацию джозефсоновских осцилляций в области ферромагнитного резонанса

гую амплитуду и другую зависимость от частоты излучения. Получены важные результаты, демонстрирующие возможность управления не только частотой, но и амплитудой магнитной прецессии в области синхронизации. Это открывает уникальные перспективы для контроля и управления магнитным моментом в гибридных сверхпроводящих системах. Важным моментом является возможность управления ступеньками синхронизации сверхпроводящим током. Мы полагаем, что это явление найдет широкое применение в будущем, как, например, ступеньки Шапиро на ВАХ, благодаря своей магнитной природе. Соответствующая статья опубликована в «Physical Review B» [22].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами создана база для проведения совместных исследований по моделированию сверхпроводниковых наноструктур различного типа, в частности, систем связанных джозефсоновских переходов с различного типа шунтированием, что позволяет проводить моделирование фазовой динамики и вольт-амперных характеристик и различных резонансных явлений. Получены интересные и важные результаты при исследовании сверхпроводниковых структур с ферромагнитными материалами, позволяющие управлять магнитными свойствами сверхпроводящим



Рис. 19. Участники сотрудничества ОИЯИ–Египет в области сверхпроводниковой электроники и спинтроники



Рис. 20. 2021 г. Знаменательное событие — Египет стал полноправным членом ОИЯИ

током. Важное место занимают совместные исследования топологических и хаотических явлений в джозефсоновских структурах. Основные участники сотрудничества ОИЯИ–Египет в области сверхпроводниковой электроники и спинтроники представлены на рис. 19.

2021 г. знаменателен тем, что Египет стал полноправным членом ОИЯИ (рис. 20). Мы полагаем, что это событие выведет сотрудничество ОИЯИ с научными учреждениями Египта в области теоретических исследований сверхпроводниковых джозефсоновских наноструктур на новый уровень, создавая основу для развития прикладных исследований и различных приложений сверхпроводниковой электроники и спинтроники в обеих странах.

**Благодарности.** Мы благодарим Дмитрия Каманина, руководителя отдела международного сотрудничества ОИЯИ, Махмуда Сакра, президента Академии научных исследований и технологий в Египте (ASRT), Станислава Пакуляка, директора университетского центра в ОИЯИ, Ваэля Бадави, полномочного представителя Египта в ОИЯИ, за организацию и поддержку нашего сотрудничества, а также Анатолия Васильева, Юлию Полякову, Елену Карпову, Юлию Рыбачук и Элизабет Паска за организацию поездок и мероприятий.

Мы выражаем благодарность Дмитрию Казакову, директору ЛТФ ОИЯИ, Владимиру Осипову, начальнику отдела теории конденсированного состояния ЛТФ, а также египетским профессорам Тареку Хуссейну, Халеду Хигабу, Эль Саманну, Валаа Сейфу, Тарвату Эль-Шербини и Али Элити за поддержку совместных проектов и визитов из Египта.

Мы благодарим административный персонал ОИЯИ и ASRT за подготовку необходимых документов для реализации нашего сотрудничества.

## ПУБЛИКАЦИИ КОНФЕРЕНЦИЙ

- *Nashaat M., Sameh M., Botha A. E., Kulikov K. V., Shukrinov Yu. M.* Bifurcations in Josephson Junction Coupled to the Nanomagnet // XXVI Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”, March, 14–17, 2022.
- *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Botha A. E., Nashaat M., Abdel Moneim S. A., El Samman H.* Peculiarities of Anomalous Josephson Effect in Superconducting Nanostructures // 14th Workshop on Low Temperature Electronics, 2021.
- *Kulikov K. V., Nashaat M., Sameh M., Sengupta K., Shukrinov Yu. M.* // Intern. Symp. (Nanophysics and Nanoelectronics), 2020.
- *Nashaat M., Shukrinov Yu. M., Botha A. E., Plecenik A., Rahmonov I. R., Kulikov K.* Numerical Simulations for Spintronic Effects in Josephson Junctions Coupled to Ferromagnet // Mathematical Modelling and Computational Physics 2019-Slovakia.
- *Kulikov K. V., Medvedeva S. Yu., Dawood R., Shukrinov Yu. M.* P-P Josephson Junction in the Presence of Localized Majorana Bound States // Proc. of the XX Intern. Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”. 2016. V. 1, P. 71.
- *Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Dawood R., Nashaat M.* Phase Dynamics of Superconducting Quantum Devices with Topologically Nontrivial Barriers // Proc. of the XX Intern. Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”. 2016. V. 1. P. 103.
- *Benecha E. M., Dawood R., Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Botha A. E.* Simulations of dc SQUIDS with Topologically Trivial and Nontrivial Barriers // Proc. of JINR Symp. “Few to Many Body Systems: Models and Methods and Applications”, 2016. P. 155.
- *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Botha A., Gaafar M., El Samman H., Dawood R., Nashaat M., El Sherbini T.* Intrinsic Josephson Junctions for Superconducting Electronics and Quantum Computation // Proc. of the 15th Intern. Superconductive Electronics Conf. (ISEC 2015), Japan, Nagoya, July 6–9, 2015, DP-P02.
- *Rahmonov I., Shukrinov Yu., Dawood R.* Peculiarities of Phase Dynamics of DC-SQUID with Nontrivial Barriers // Abstr. Book of the 10th Intern. Symp. on Intrinsic Josephson Effects and Plasma Oscillations in High-Tc Superconductors (Plasma 2016). P. 119.
- *Rahmonov I. R., Dawood R., Shukrinov Yu. M.* Ratio of Majorana Fermions and Cooper Pairs in DC-SQUID with Nontrivial Barriers // Intern. Conf. “Superconducting Hybrid Nanostructures: Physics and Application”, 2016.
- *Rahmonov I., Shukrinov Yu., Dawood R.* DC-SQUIDS with Topologically Trivial and Nontrivial Barriers: A Comparative Analysis // The 5th Intern. Workshop on Numerical Modelling of High Temperature Superconductors, 2016.

- *Rahmonov I., Shukrinov Yu.M., Dawood R.* Majorana Fermions Detectors Based on DC-SQUID. Superconductors-Based Sensors and Quantum Technologies Workshop, 2016.
- *Shukrinov Yu.M., Rahmonov I.R., Kulikov K.V., Nashaat M.* Modelling of Intrinsic Josephson Junctions in HTSC // Abstr. for the Brazil-JINR Forum “Frontiers in Elementary Particle, Nuclear and Condensed Matter Physics”. 2015, Dubna, 15–19 June. P. 50.
- *Rahmonov I.R., Shukrinov Yu.M., Sengupta K., Dawood R.* Peculiarities of DC-SQUIDS with Topologically Nontrivial Barrier // Abstr. for the Intern. Conf. “Interaction of Superconductivity and Magnetism in Nanosystems”, Moscow, Sept. 2–4, 2015. P. 44–45.
- *Shukrinov Y., Nashaat M., Kulikov K., Dawood R., El Samman H., El Sherbini Th.M.* Charge Imbalance in a Stack of Intrinsic Josephson Junctions under External Radiation // Abstr. for the Intern. Conf. “ Interaction of Superconductivity and Magnetism in Nanosystems”, Moscow, Sept. 2–4, 2015. P. 42.
- *Benecha E., Rahmonov I.R., Shukrinov Yu.M., Dawood R.* Simulation of Topologically Nontrivial dc-Squid, 4th South Africa // Abstr. for JINR Symp. “Few to Many Body Systems: Models and Methods and Applications”, Dubna, Sept. 21–25, 2015. P. 50–51.
- *Shukrinov Yu. M., Nashaat M., Kulikov K., Dawood R., El Samman H., El Sherbini Th. M.* Shapiro Step at Nonequilibrium Condition // Abstr. for “III National Conf. of Applied Superconductivity 2015”, Moscow, 25–26 Nov., 2015. P. 30.
- *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I.R., Kulikov K., Gaafer M., Dawood R., Nashaat M., El Sherbini Th.M. , El Samman H.* Physical Phenomena in a System of Coupled Josephson Junctions and Their Application in Superconducting Electronics and Quantum Computers // Abstr. for “III National Conf. of Applied Superconductivity 2015”, Moscow, 25–26 Nov., 2015. P. 28.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Shukrinov Yu.M., Gaafer M.A.* Charging of Superconducting Layers and Resonance-Related Hysteresis in the Current-Voltage Characteristics of Coupled Josephson Junctions // *Phys. Rev. B.* 2011. V. 84. P. 094514.
2. *Gaafer M. A., Shukrinov Yu.M., Foda A.* Shapiro and Parametric Resonances in Coupled Josephson Junctions // *J. Phys.: CS.* 2012. V. 393. P. 012021.
3. *Gaafer M., Shukrinov Yu.M., El Samman H., Maize S.* Simulation of Shapiro Steps in Current- Voltage Characteristics of Intrinsic Josephson Junctions in High Temperature Superconductors // *Lecture Notes Comp. Sci.* 2012. V. 7125. P. 221–226.
4. *Shukrinov Yu.M., Rahmonov I.R., Gaafer M.A.* Calculation of the Plasma Frequency of a Stack of Coupled Josephson Junctions Irradiated with Electromagnetic Waves // *Phys. Rev. B.* 2012. V. 86. P. 184502.
5. *Gaafer M.A., Shukrinov Yu.M.* Effect of Microwave Irradiation on Parametric Resonance in Intrinsic Josephson Junctions // *Physica C.* 2013. V. 491. P. 56–58.
6. *Shukrinov Yu.M., Abdelhafiz H.* Breathing Charge Density Waves in Intrinsic Josephson Junctions // *JETP Lett.* 2013. V. 98. P. 55-556.

7. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Nashaat M.* Staircase Structure of Shapiro Steps // JETP Lett. 2015. V. 102. P. 803–806.
8. *Nashaat M., Shukrinov Yu. M., Kulikov K. V., Dawood R., El Samman H., El Sherbini Th. M.* Charge Imbalance in a Layered Structure of High Temperature Superconductors // Egypt. J. Phys. 2016. V. 44. P. 75–84.
9. *Shukrinov Yu. M., Nashaat M., Kulikov K. V., Dawood R., El Samman H., El Sherbini Th. M.* Shapiro Step at Nonequilibrium Conditions // Eur. Phys. Lett. 2016. V. 115. P. 20003.
10. *Kulikov K. V., Shukrinov Yu. M., Nashaat M., Irie A.* Shift of Shapiro Step in High Critical Temperature Superconductors // EPJ Web of Conf. 2018. V. 173. P. 03015.
11. *Kulikov K. V., Nashaat M., Shukrinov Yu. M.* Stationary Charge Imbalance Effect in a System of Coupled Josephson Junctions // Eur. Phys. Lett. 2019. V. 127. P. 67004.
12. *Shukrinov Yu. M., Botha A. E., Abouhaswa A. S.* Double, Triple Resonance behavior in Large Systems of LC-Shunted Intrinsic Josephson Junctions // Phys. Lett. A. 2021. V. 387. P. 127025.
13. *Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Dawood R.* Dynamics of SQUIDs with Topologically Nontrivial Barriers // JETP Lett. 2016. V. 103. P. 444.
14. *Kulikov K. V., Davud R., Nakhmedov E. P., Shukrinov Yu. M.* Josephson Junction with Two Superconducting Current Components // JETP. 2017. V. 125. P. 333.
15. *Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Dawood R., Samman H. E.* Determination of Cooper Pairs and Majorana Fermions Currents Ratio in DC-SQUID with Topologically Nontrivial Barriers // Fizika Nizkih Temperatur (Low Temperature Phys.). 2017. V. 43. P. 824–828.
16. *Nashaat M., Botha A. E., Shukrinov Yu. M.* Devil's Staircases in the IV Characteristics of Superconductor/ Ferromagnet/Superconductor Josephson Junctions // Phys. Rev. B. 2018. V. 97. P. 224514.
17. *Nashaat M., Shukrinov Yu. M.* Ferromagnetic Resonance and Effect of Supercurrent on the Magnetization Dynamics in S/F/S Junctions under Circularly Polarized Magnetic Field // Phys. Part. Nucl. 2020. V. 17. P. 7984.
18. *Nashaat M., Bobkova I. V., Bobkov A. M., Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Sengupta K.* Electrical Control of Magnetization in Superconductor/Ferromagnet/Superconductor Junctions on a Three-Dimensional Topological Insulator // Phys. Rev. B. 2019. V. 100. P. 054506.
19. *Shukrinov Yu. M., Nashaat M., Kulikov K. V., Rahmonov I. R.* Ferromagnetic Resonance and the Dynamics of the Magnetic Moment in a “Josephson Junction–Nanomagnet” System // JETP Lett. 2019. V. 110. P. 149–154.
20. *Kulikov K. V., Anghel D. V., Preda A. T., Nashaat M., Sameh M., Shukrinov Yu. M.* Kapitza Pendulum Effects in a Josephson Junction Coupled to a Nanomagnet under External Periodic Drive // Phys. Rev. B. 2022. V. 105. P. 094421.
21. *Nashaat M., Sameh M., Botha A. E., Kulikov K. V. and Shukrinov Yu. M.* Bifurcation Structure and Chaos in Nanomagnet Coupled to Josephson Junction. arXiv:2111.12659 (2022).
22. *Abdelmoneim S. A., Shukrinov Yu. M., Kulikov K., ElSamman H., Nashaat M.* Locking of Magnetization and Josephson Oscillations at Ferromagnetic Resonance in  $\varphi_0$  Junction under External Radiation // Phys. Rev. B. 2022. V. 106. P. 014505.
23. *Shukrinov Yu. M.* Anomalous Josephson Effect // Phys. Usp. 2022. V. 65, No. 4.
24. *Žutić I., Fabian J., Sarma S. Das.* Spintronics: Fundamentals and Applications // Rev. Mod. Phys. 2004. V. 76, No. 2. P. 323.

25. *Linder J., Robinson J.W.A.* Superconducting Spintronics // *Nature Phys.* 2015. V. 11. P. 307–315.
26. *Golubov A.A., Kupriyanov M.Yu., Il'ichev E.* The Current-Phase Relation in Josephson Junctions // *Rev. Mod. Phys.* 2004. V. 76. P. 411.
27. *Mai S., Kandelaki E., Volkov A.F., Efetov K.B.* Interaction of Josephson and Magnetic Oscillations in Josephson Tunnel Junctions with a Ferromagnetic Layer // *Phys. Rev. B* 2011. V. 84. P. 144519.
28. *Buzdin A.* Direct Coupling between Magnetism and Superconducting Current in the Josephson  $\varphi_0$  Junction // *Phys. Rev. Lett.* 2008 V. 101. P. 107005.
29. *Shukrinov Yu.M., Rahmonov I.R., Sengupta K., Buzdin A.* Magnetization Reversal by Superconducting Current in  $\varphi_0$  Josephson Junctions // *Appl. Phys. Lett.* 2017 V. 110. P. 182407.
30. *Liřhitz E.M., Pitaevskii L.P.* Course of Theoretical Physics, Theory of the Condensed State. V.9 Oxford: Butterworth Heinemann, 1991; *Hillebrands B., Ounadjela K.* Spin Dynamics of Confined Magnetic Structures II. Berlin: Springer-Verlag, 2003. P. 1–26.
31. *Weides M., Kemmler M., Kohlstedt H., Waser R., Koelle D., Kleiner R., Goldobin E.*  $0 - \pi$  Josephson Tunnel Junctions with Ferromagnetic Barrier // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. P. 247001.
32. *Pfeiffer J., Kemmler M., Koelle D., Kleiner R., Goldobin E., Weides M., Feofanov A.K., Lisenfeld J., Ustinov A.V.* Static and Dynamic Properties of  $0, \pi$ , and  $0 - \pi$  Ferromagnetic Josephson Tunnel Junctions // *Phys. Rev. B.* 2008. V. 77. P. 214506.
33. *Hikino S., Mori M., Takahashi S., Maekawa S.* Microwave-Induced Supercurrent in a Ferromagnetic Josephson Junction // *Supercond. Sci. Technol.* 2011. V. 24. P. 024008.
34. *Wild G., Probst C., Marx A., Gross R.* Josephson Coupling and Fiske Dynamics in Ferromagnetic Tunnel Junctions // *Eur. Phys. J. B.* 2010. V. 78. P. 509–523.
35. *Kemmler M., Weides M., Weiler M., Opel M., Goennenwein S.T.B., Vasenko A.S., Golubov A.A., Kohlstedt H., Koelle D., Kleiner R., Goldobin E.* Magnetic Interference Patterns in  $0 - \pi$  Superconductor/Insulator/Ferromagnet/Superconductor Josephson Junctions: Effects of Asymmetry between  $0$  and  $\pi$  Regions // *Phys. Rev. B.* 2010 V. 81. P. 054522.
36. *Volkov A.F., Efetov K.B.* Hybridization of Spin and Plasma Waves in Josephson Tunnel Junctions Containing a Ferromagnetic Layer // *Phys. Rev. Lett.* 2009 V. 103. P. 037003.
37. *Kapitza P.L.* Thermal Conductance and Diffusion in Liquid Medium in the Case of Periodic Flow. I. Determination of Coefficient of Wave Transfer in a Pipe, Slit, and Channel // *Sov. Phys. JETP.* 1951. V. 21. P. 588.
38. *Bukov M., D'Alessio L., Polkovnikov A.* Universal High-Frequency behavior of Periodically Driven Systems: From Dynamical Stabilization to Floquet Engineering // *Adv. Phys.* 2015. V. 64. P. 139.
39. *Borromeo M., Marchesoni F.* Artificial Sieves for Quasimassless Particles // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. P. 150605.
40. *Aidelsburger M., Lohse M., Schweizer C., Atala M., Barreiro J.T., Nascimbène S., Cooper N.R., Bloch I., Goldman N.* Measuring the Chern Number of Hofstadter Bands with Ultracold Bosonic Atoms // *Nat. Phys.* 2015. V. 11. P. 162.
41. *Wickenbrock A., Holz P.C., Abdul Wahab N.A., Phoonthong P., Cubero D., Renzoni F.* Vibrational Mechanics in an Optical Lattice: Controlling Transport Via Potential Renormalization // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. P. 020603.

42. *Chizhevsky V.N.* Experimental Evidence of Vibrational Resonance in a Multistable System // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 89. P. 062914.
43. *Uzuntarla M., Yilmaz E., Wagemakers A., Ozer M.* Vibrational Resonance in a Heterogeneous Scale Free Network of Neurons // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2015. V. 22. P. 367.
44. *Boukobza E., Moore M.G., Cohen D., Vardi A.* Nonlinear Phase Dynamics in a Driven Bosonic Josephson Junction // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 104. P. 240402.
45. *Citro R., Dalla Torre E.G., D'Alessio L., Polkownikov A., Babadi M., Oka T., Demler E.* Dynamical Stability of a Many-Body Kapitza Pendulum // *Ann. Phys.* 2015. V. 360. P. 694.
46. *Fialko O., Opanchuk B., Sidorov A. I., Drummond P.D., Brand J.* Fate of the False Vacuum: Towards Realization with Ultra-Cold Atoms // *Eur. Phys. Lett.* 2015. V. 110. P. 56001.
47. *Longhi S.* Rapidly Oscillating Scatteringless Non-Hermitian Potentials and the Absence of Kapitza Stabilization // *Eur. Phys. Lett.* 2017. V. 118. P. 20004.
48. *Shayak B.* A Mechanism for Electromagnetic Trapping Of Extended Objects // *Eur. Phys. Lett.* 2017. V. 118. P. 45002.
49. *Martin J., Georgeot B., Guéry-Odelin D., Shepelyansky D.L.* Kapitza Stabilization of a Repulsive Bose-Einstein Condensate in an Oscillating Optical Lattice // *Phys. Rev. A.* 2018. V. 97. P. 023607.
50. *Yurgens A.A.* Intrinsic Josephson junctions: recent developments // *Supercond. Sci. Technol.* 2000. V. 13. P. R85.
51. *Kleiner R., Steinmeyer F., Kunkel G., Muller P.* Intrinsic Josephson Effects in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  Single Crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68. P. 2394.
52. *Tsujimoto M., Yamamoto T., Delfanazari K., Nakayama R., Kitamura T., Sawamura M., Kashiwagi T., Minami H., Tachiki M., Kadowaki K., Klemm R.A.* Broadly Tunable Subterahertz Emission from Internal Branches of the Current-Voltage Characteristics of Superconducting  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  Single Crystal // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. P. 107006.
53. *Benseman T.M., Koshelev A.E., Gray K.E., Kwok W.-K., Welp U., Kadowaki K., Tachiki M., Yamamoto T.* Tunable Terahertz Emission from  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  Mesa Devices // *Phys. Rev. B.* 2011. V. 84. P. 064523.
54. *Krasnov V.M.* Terahertz Electromagnetic Radiation from Intrinsic Josephson Junctions at Zero Magnetic Field Via Breather-Type Self-Oscillations // *Phys. Rev. B.* 2011. V. 83. P. 174517.
55. *Wang H.B., Guènon S., Gross B., Yuan J., Jiang Z. G., Zhong Y. Y., Grünzweig M., Iishi A., Wu P. H., Hatano T., Koelle D., Kleiner R.* Coherent Terahertz Emission of Intrinsic Josephson Junction Stacks in the Hot Spot Regime // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 105. P. 057002.
56. *Tachiki M., Fukuya S., Koyama T.* Mechanism of Terahertz Electromagnetic Wave Emission from Intrinsic Josephson Junctions // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 127002.
57. *Ozyuzer L., Koshelev A.E., Kurter C., Gopalsami N., Li Q., Tachiki M., Kadowaki K., Yamamoto T., Minami H., Yamaguchi H., Tachiki T., Gray K.E., Kwok W.-K., Welp U.* Emission of Coherent THz Radiation from Superconductors // *Sci.* 2007. V. 318. P. 1291.
58. *Shapiro S.* Josephson Currents in Superconducting Tunneling: The Effect of Microwaves and Other Observations // *Phys. Rev. Lett.* 1963. V. 11. P. 80.
59. *Tinkham M.* *Introduction to Superconductivity*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1996).
60. *Pfeiffer J., Schuster M., Abdumalikov A.A., Jr., Ustinov A.V.* Observation of Soliton Fusion in a Josephson Array // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96. P. 034103.



61. Pfeiffer J., Abdumalikov A.A., Jr., Schuster M., Ustinov A.V. Resonances between Fluxons and Plasma Waves in Underdamped Josephson Transmission Lines of Stripline Geometry // *Phys. Rev. B.* 2008. V. 77. P. 024511.
62. Watanabe S., Strogatz S.H., van der Zant H.S., Orlando T.P. Whirling Modes and Parametric Instabilities in the Discrete Sine–Gordon Equation: Experimental Tests in Josephson Rings // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 74. P. 379.
63. Koyama T., Tachiki M. I-V Characteristics of Josephson-Coupled Layered Superconductors with Longitudinal Plasma Excitations // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 54. P. 16183.
64. Kleiner R., Guber T., Hechtfisher G. Stacked Long Josephson Junctions in Zero Magnetic Field: A Numerical Study of Coupled One-Dimensional Sine–Gordon Equations // *Phys. Rev. B.* 2000. V. 62. P. 4086.
65. Shukrinov Yu.M., Mahfouzi F. Branching in Current–Voltage Characteristics of Intrinsic Josephson Junctions // *Supercond. Sci. Technol.* 2007. V. 19. P. S38–S42.
66. Shukrinov Yu.M., Mahfouzi F. Influence of Coupling between Junctions on Breakpoint Current in Intrinsic Josephson Junctions // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. P. 157001.
67. Shukrinov Yu.M., Mahfouzi F., Pedersen N. Investigation of the Breakpoint Region in Stacks with a Finite Number of Intrinsic Josephson Junctions // *Phys. Rev. B.* 2007. V. 75. P. 104508.
68. Artemenko S., Kobelkov A. Intrinsic Josephson effect and Violation of the Josephson Relation in Layered Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. P. 3551.
69. Preis C., Helm C., Keller J., Sergeev A., Kleiner R. Coupling of intrinsic Josephson oscillations in layered superconductors by charge fluctuations // *Supercond. Superlattices II: Native and Artificial.* 1998. V. 3480. P. 236.
70. Shafraanjuk S. E., Tachiki M. Emission of plasmons caused by quasiparticle injection to a high- $T_c$  superconductor // *Phys. Rev. B.* 1999. V. 59. P. 14087.
71. Helm C., Preis C., Walter C., Keller J. Theory for the Coupling between Longitudinal Phonons and Intrinsic Josephson Oscillations in Layered Superconductors // *Phys. Rev. B.* 2000. V. 62. P. 6002.
72. Helm C., Keller J., Preis C., Sergeev A. Static Charge Coupling of Intrinsic Josephson Junctions // *Physica C.* 2001. V. 362. P. 43.
73. Helm C., Bulaevskii L. N., Chudnovsky E.M., Maley M.P. Reflectivity and Microwave Absorption in Crystals with Alternating Intrinsic Josephson Junctions // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89. P. 057003.
74. Keller J., Ryndyk D.A. Static Charge-Imbalance Effects in Intrinsic Josephson Systems // *Phys. Rev. B.* 2005. V. 71. P. 054507.
75. Rother S., Koval Y., Müller P., Kleiner R., Ryndyk D.A., Keller J., Helm C. Charge-Imbalance Effects in Intrinsic Josephson Systems // *Phys. Rev. B.* 2003. V. 67. P. 024510.
76. Maiti M., Kulikov K.V., Sengupta K., Shukrinov Yu.M. Josephson Junction Detectors for Majorana Modes and Dirac Fermions // *Phys. Rev. B.* 2015. V. 92. P. 224501.
77. Linder J., Halterman K. Superconducting Spintronics with Magnetic Domain Walls // *Phys. Rev. B.* 2014. V. 90. P. 104502.
78. Shukrinov Yu.M., Mazanik A., Rahmonov I., Botha A., Buzdin A. Re-orientation of the Easy Axis in  $\varphi_0$ -Junction // *Eur. Phys. Lett.* 2018. V. 122. P. 37001.
79. Shukrinov Yu.M., Rahmonov I., Sengupta K., Buzdin A. Magnetization reversal by superconducting current in  $\varphi_0$ -Josephson junctions // *Appl. Phys. Lett.* 2017. V. 110. P. 182407.

80. *Buzdin A.* Direct Coupling between Magnetism and Superconducting Current in the Josephson  $\varphi_0$  Junction // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. P. 107005.
81. *Buzdin A. I.* Proximity Effects in Superconductor-Ferromagnet Heterostructures // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77. P. 935.
82. *Bergeret F., Volkov A. F., Efetov K. B.* Odd Triplet Superconductivity and Related Phenomena in Superconductor-Ferromagnet Structures // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77. P. 1321.
83. *Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il'ichev E.* The Current-Phase Relation in Josephson Junctions // *Rev. Mod. Phys.* 2004. V. 76. P. 411.
84. *Silaev M. A., Tokaily I. V., Bergeret F. S.* Anomalous Current in Diffusive Ferromagnetic Josephson Junctions // *Phys. Rev. B.* 2017. V. 95. P. 184508.
85. *Bobkova I., Bobkov A., Silaev M.* Gauge Theory of the Long-Range Proximity Effect and Spontaneous Currents in Superconducting Heterostructures with Strong Ferromagnets // *Ibid.* V. 96. P. 094506.
86. *Ben-Jacob E., Braiman Y., Shainsky R., Imry Y.* Microwave Induced "Devil's Staircase" Structure and "Chaotic" behavior in Current Fed Josephson Junctions // *Appl. Phys. Lett.* 1981. 38. P. 822.
87. *Shukrinov Yu. M., Medvedeva S. Yu., Botha A. E., Kolahchi M., Irie A.* Devil's Staircases and Continued Fractions in Josephson Junctions // *Phys. Rev. B.* 2013. V. 88. P. 214515.
88. *Shukrinov Yu. M., Botha A. E., Medvedeva S. Yu., Kolahchi M. R., Irie A.* Structured Chaos in a Devil's Staircase of the Josephson Junction // *Chaos.* 2014. V. 24. P. 033115.
89. *Sokolović I., Mali P., Odavić J., Radošević S., Medvedeva S. Yu., Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Tekić J.* Devil's Staircase and the Absence of Chaos in the dc- and ac-Driven Overdamped Frenkel-Kontorova Model // *Phys. Rev. E.* 2017. V. 96. P. 022210.
90. *Nebendahl V., Dür W.* Improved Numerical Methods for Infinite Spin Chains with Long-Range Interactions // *Phys. Rev. B.* 2013. V. 87. P. 075413.
91. *Takigawa M., Horvatić M., Waki T., Krämer S., Berthier C., Lévy-Bertrand F., Sheikin I., Kageyama H., Ueda Y., Mila F.* Incomplete Devil's Staircase in the Magnetization Curve of  $\text{SrCu}_2(\text{BO}_3)_2$  // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. P. 067210.
92. *Hriscu A. M., Nazarov Yu. V.* Quantum synchronization of conjugated variables in a superconducting device leads to the fundamental resistance quantization // *Ibid.* P. 097002.
93. *Yao Y., Cai R., Yang S.-H., Xing W., Ma Y., Mori M., Ji Y., Maekawa S., Xie X.-C., Han W.* Half-Integer Shapiro Steps in Strong Ferromagnetic Josephson Junctions // *Phys. Rev. B.* 2021. V. 104. P. 104414.
94. *Cai L., Chudnovsky E. M.* Interaction of a Nanomagnet with a Weak Superconducting Link // *Phys. Rev. B.* 2010. V. 82. P. 104429.
95. *Cai L., Garanin D. A., Chudnovsky E. M.* Reversal of Magnetization of a Single-Domain Magnetic Particle by the ac Field of Time-Dependent Frequency // *Phys. Rev. B.* 2013. V. 87. P. 024418.
96. *Ghosh R., Maiti M., Shukrinov Yu. M., Sengupta K.* Magnetization-Induced Dynamics of a Josephson Junction Coupled to a Nanomagnet // *Phys. Rev. B.* 2017. V. 96. P. 174517.
97. *Richards C. J., Smart T. J., Jones P. H., Cubero D.* A Microscopic Kapitza Pendulum // *Sci. Rep.* 2018. V. 8. P. 13107.
98. *Golovinski P. A., Dubinkin V. A.* Quantum States of the Kapitza Pendulum // *arXiv:2102.12711.* 2021.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 28.07.2022.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,58. Тираж 120 экз. Заказ № 60478.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)