

P1-2023-22

А. В. Беляев

НАХОЖДЕНИЕ МАССЫ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ  
ПО ФОРМЕ ЕЕ ТРАЕКТОРИИ, А ТАКЖЕ ПРОВЕРКА  
ГИПОТЕЗЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ  
АНОМАЛЬНОГО ЛЕПТОНА

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

Беляев А. В.

P1-2023-22

Нахождение массы заряженной частицы по форме ее траектории, а также проверка гипотезы существования аномального лептона

Согласно современному состоянию теории физики частиц число поколений лептонов (и кварков) равно трем. При этом, однако, распределение масс трех известных лептонов таково ( $m_e \sim 10^0$ ,  $m_\mu \sim 10^2$ ,  $m_\tau \sim 10^3$  МэВ/ $c^2$ ), что нередко возникает гипотеза о возможном существовании четвертого аномального лептона с массой  $m_a \sim 10^1$  МэВ/ $c^2$ . Столь большое различие в массах лептонов в настоящее время до конца не объяснено.

В настоящей работе выполнена прямая проверка гипотезы о существовании лептона с массой  $m_a \sim 10^1$  МэВ/ $c^2$ .

Так, предлагается метод нахождения массы заряженной частицы по оставленному ей пространственному следу (треку), проходящему через вещество в однородном магнитном поле *вблизи точки останова*. В проекции пространственного трека на плоскость, перпендикулярную направлению поля, траектория частицы аппроксимируется спиралью («адрондой»), один из параметров которой пропорционален массе частицы. Начальная энергия частицы для данной задачи значения не имеет. В соответствии с методом находится масса частицы.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2023

Belyaev A. V.

P1-2023-22

Finding the Mass of a Charged Particle According to the Shape of Its Trajectory, and Hypothesis of Anomalous Lepton Existence Test

According to the current state of the theory of particle physics, the number of generations of leptons (and quarks) is three. In this case, however, the mass distribution of the three known leptons is such ( $m_e \sim 10^0$ ,  $m_\mu \sim 10^2$ ,  $m_\tau \sim 10^3$  MeV/ $c^2$ ) that the hypothesis of the possible existence of a fourth anomalous lepton with a mass  $m_a \sim 10^1$  MeV/ $c^2$  often arises. Such a large difference in the masses of leptons is not fully explained at present.

In this paper, we directly test the hypothesis of the existence of a lepton with a mass  $m_a \sim 10^1$  MeV/ $c^2$ .

Thus, a method is proposed for finding the mass of a charged particle by the spatial trace (track) left by it, passing through matter in a uniform magnetic field near the stopping point. In the projection of the spatial track onto a plane perpendicular to the direction of the field, the particle trajectory is approximated by a helix (“hadroide”), one of whose parameters is proportional to the particle mass. The initial energy of the particle does not matter for this problem. In accordance with the method, the mass of the particle is found.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2023

## ВВЕДЕНИЕ

Согласно современному состоянию теории физики частиц число поколений лептонов (и кварков) равно трем (см., например, [1], с. 197, 226). При этом, однако, распределение масс трех известных лептонов таково ( $m_e \sim 10^0$ ,  $m_\mu \sim 10^2$ ,  $m_\tau \sim 10^3$  МэВ/ $c^2$ ), что их логарифмы с впечатляющей точностью укладываются на прямую, если в качестве соответствующих абсцисс брать номер поколения лептонов или порядок массы как целое число (рис. 1, на котором указана соответствующая МНК-прямая).

Отсюда нередко возникает (не имеющая физического обоснования) гипотеза о возможном существовании четвертого аномального лептона с массой  $m_a \sim 10^1$  МэВ/ $c^2$ , что также показано на рис. 1.

В работе [2] проведено соответствующее исследование. В настоящей работе выполняется прямая проверка гипотезы о существовании лептона с массой  $m_a \sim 10^1$  МэВ/ $c^2$ .

Предлагается метод нахождения массы заряженной частицы по кривизне оставленного ею пространственного следа (треку), проходящему через вещество в однородном магнитном поле *вблизи точки остановки*. В проекции пространственного трека на плоскость, перпендикулярную направлению поля, траектория частицы аппроксимируется спиралью, один из параметров которой пропорционален массе частицы. Начальная энергия

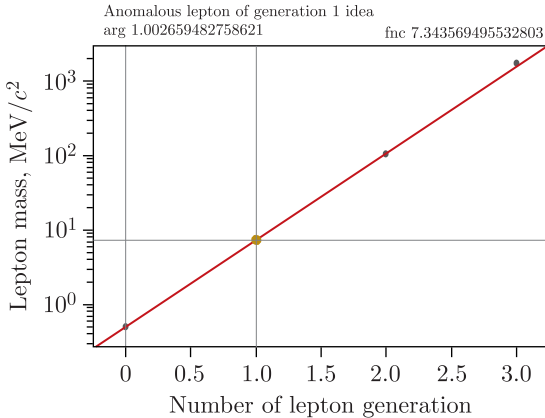


Рис. 1. Положение масс трех известных лептонов (серые точки) и аномального кандидата (большая желтая точка)

частицы для данной задачи значения не имеет. В соответствии с методом находится масса частицы.

Если воздействие кулоновского рассеяния и тормозного излучения на движущиеся в веществе с однородным магнитным полем заряженные частицы данной массы можно считать пренебрежимо малым (остается только торможение от прохождения через вещество), тогда пространственные траектории таких частиц, независимо от их начального импульса, представляют собой одну и ту же кривую. Для частицы с кинетической энергией  $T$ , значительно превосходящей ее массу  $m$ , эта кривая близка к винтовой линии, для частиц же, потерявших при движении через вещество значительную часть кинетической энергии ( $T \sim m$ ), — пространственная спираль, заканчивающаяся в конкретной (в зависимости от начального импульса) точке остановки. Такие спирали, оставленные частицами *одной и той же массы*, могут быть совмещены, если частицы двигались под одним и тем же углом к однородному магнитному полю и если начинать совмещение с точки остановки. Таким образом, для заданных условий вид рассматриваемой спирали зависит только от массы частицы.

Рассмотрим проекцию пространственной спирали на плоскость  $xOy$  (рис. 2). На ней частица движется в направлении стрелок вплоть до точки остановки в начале координат  $xOy$ .

Будем определять траекторию частиц по координатам ряда точек, измеренных на фотографиях треков, полученных на пузырьковых камерах [3, 4]. Установим нумерацию точек ( $i = 1, n$ ) в направлении, обратном движению частицы, начиная от начала спирали (от точки остановки), что помечено пунктирной стрелкой. Имеем  $s_i$  — пробег,  $p_i$  — импульс в  $i$ -й точке. Особыми точками на спирали рис. 2 помечены позиции, в которых спираль последовательно заворачивается на углы  $\pi/2$ .

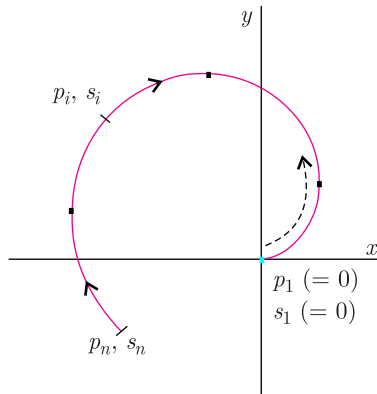


Рис. 2. Плоская траектория положительно заряженной частицы в системе координат  $(x, y)$ , в которой абсцисса является касательной к траектории в точке остановки

# 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦЫ СПИРАЛЬЮ

В [5] (с. 461) для адронов даны «полезные приближения» эффективного пробега  $R$ :

$$\begin{cases} R = 43 \left( \frac{mc^2}{100 \text{ МэВ}} \right) \left( \frac{E}{mc^2} \right)^{1,75} & [\text{г/см}^2, \text{ в воздухе}] \\ R = 80 \left( \frac{mc^2}{100 \text{ МэВ}} \right) \left( \frac{E}{mc^2} \right)^{1,75} & [\text{г/см}^2, \text{ в свинце}] \end{cases}, \quad (1)$$

для веществ с плотностями, охватывающими практически весь их возможный диапазон; здесь  $E$  — кинетическая энергия; формула дается в предположении  $E < mc^2$ , причем при  $E = mc^2$  отклонение составляет  $\sim 15\%$ .

Из (1) получается (см. приложение А) выражение для полного пробега  $S$  [см] в зависимости от начального импульса  $p$  и массы  $m$ :

$$S = \frac{\varkappa}{d} m \left( \frac{\sqrt{p^2 + m^2} - m}{m} \right)^{1/2w}, \quad (2)$$

где  $w = 2/7$ ,  $d$  — плотность вещества [г/см<sup>3</sup>], коэффициент  $\varkappa$  («каппа») имеет размерность [(г/МэВ)/см<sup>2</sup>]; принимая далее для кинетической энергии обозначение  $T$ , устанавливаем, что формула (2) дается для  $T < m$ .

Дополняя (1) данными рабочих веществ пузырьковой камеры — жидкого водорода  $\text{H}_2$  и пропана  $\text{C}_3\text{H}_8$  (для которых константы  $\varkappa$  установлены нами путем подбора по результатам калибровки, см. далее разд. 5), — приведем значения констант:

Таблица 1

Вещество	$\varkappa$ , (г/МэВ)/см <sup>2</sup>	$d$ , г/см <sup>3</sup>	$\varkappa/d$ , см/МэВ
Воздух	0,43	0,0012754	337,1
Жидкий $\text{H}_2$	0,22	0,0585	3,761
Жидкий $\text{C}_3\text{H}_8$	0,45	0,427	1,054
Свинец Pb	0,80	11,35	0,0705

Из (2) легко получается обратная зависимость начального импульса от полного пробега  $S$  и некоторого характерного пробега  $A$  (зависящего от массы  $m$ ):

$$p = \frac{d\sqrt{2}}{\varkappa} A \left( \frac{S}{A} \right)^w \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{S}{A} \right)^{2w}}, \quad (3)$$

где  $A = \varkappa m/d$  — величина с размерностью длины. При  $S = A$  кинетическая энергия частицы оказывается равной ее массе:  $T = m$  (импульс  $p = m\sqrt{3}$ , энергия  $E = 2m$ ). Для известных адронов имеем значения параметра  $A$  [см], см. табл. 2: что совпадает с данными, приведенными в [6], если для обоих веществ установить  $\varkappa = 0,43$ .

Таблица 2

Параметр	H <sub>2</sub>	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>
A <sub>p</sub>	3527,8	988,7
A <sub>K</sub>	1857,9	520,7
A <sub>π</sub>	524,7	147,0

Ограничение, установленное в [5] на справедливость применения формул (1), запишем теперь в виде

$$S < A. \quad (4)$$

Рассмотрим движение частицы в однородном магнитном поле. Вместо (3) перейдем к геометрическому описанию спиральной траектории. Из уравнения Лоренца для однородного магнитного поля  $H_z$  [кГс] в каждой точке траектории для единичного заряда имеем

$$p_{XY} = 0,3H_z \rho_{XY}, \quad (5)$$

где  $p_{XY}$  — проекция импульса  $p$  на плоскость  $XY$ , а  $\rho_{XY}$  — радиус кривизны проекции траектории на  $XY$ . Пусть частица движется под углом  $\alpha$  к плоскости  $XY$ . Возьмем проекцию  $s$  пробега на плоскость  $XY$ :  $s = S \cos \alpha$ . Тогда из (3) и (5) получим

$$\rho_{xy} = \frac{H_0}{H_z} a \left(\frac{s}{a}\right)^w \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^{2w}}, \quad (6)$$

где  $H_0 = d\sqrt{2}/0,3\kappa$  [кГс],  $a = A \cos \alpha$ . Теперь ограничения на справедливость применения приближения (1) вместо (4) запишем в виде

$$s < a. \quad (7)$$

Равенство (6) представляет собой уравнение плоской кривой в форме  $\rho_{xy} = \rho_{xy}(s)$ . Получим ее уравнение в *натуральном* виде. Кривизна  $K$  плоской кривой:

$$K = \frac{d\varphi}{ds} = \pm \frac{1}{\rho_{xy}},$$

где под углом  $\varphi = \varphi(s)$  понимается угол между касательной к данной кривой, проведенной в ее начале (при  $s = 0$ ), и касательной, проведенной в некоторой точке с пробегом  $s$ . Учитывая (6), имеем

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm \frac{H_z}{H_0 a \left(\frac{s}{a}\right)^w \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^{2w}}}.$$

С учетом реального направления поля (в рабочих объемах рассматриваемых пропановой и водородной камер компонента  $H_z < 0$ ) значок  $\pm$  заменим на  $j$  (знак заряда частицы), возьмем абсолютную величину поля и проинтегрируем:

$$\varphi(s) = \frac{j}{H_0} \int_0^s \frac{|H_z| ds}{a \left(\frac{s}{a}\right)^w \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^{2w}}}.$$

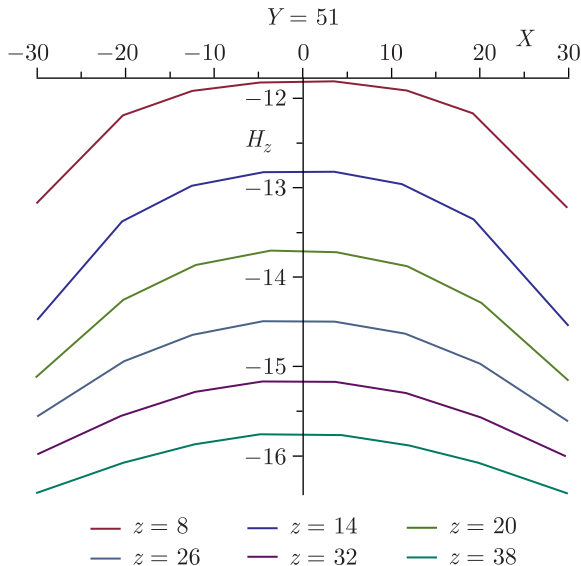


Рис. 3. Срез компоненты  $H_z$  поля [кГс] в пропановой камере для  $Y = 51$  см

В пузырьковых камерах компонента поля  $H_z$  не является константой; см., например, рис. 3 (построенный по данным из [7]), поэтому, предполагая, что исследуемая траектория располагается в ограниченной части объема камеры, используем модуль среднего (для отрезка траектории) значения  $H_z$ :

$$\varphi(s) = \frac{j |\overline{H_z}|}{H_0} \int_0^s \frac{ds}{a \left(\frac{s}{a}\right)^w \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^{2w}}}. \quad (8)$$

Следуя [8] (см. приложение Б), вместо интеграла (8) получим разложение в ряд, который ограничим пятью членами:

$$\varphi(s) = \frac{j |\overline{H_z}|}{H_0} c_0 \left(\frac{s}{a}\right)^{1-w} \times \left[ 1 + \frac{c_1}{c_0} \left(\frac{s}{a}\right)^{2w} + \frac{c_2}{c_0} \left(\frac{s}{a}\right)^{4w} + \frac{c_3}{c_0} \left(\frac{s}{a}\right)^{6w} + \frac{c_4}{c_0} \left(\frac{s}{a}\right)^{8w} \right],$$

где коэффициенты имеют значение

$$c_0 = \frac{1}{-w+1}, \quad c_1 = \frac{-1}{4(w+1)}, \quad c_2 = \frac{3}{32(3w+1)},$$

$$c_3 = \frac{-5}{128(5w+1)}, \quad c_4 = \frac{35}{2048(7w+1)}.$$

Обозначая далее  $\varphi_H = (|\overline{H}_z|/H_0)c_0$  и  $C_l = c_l/c_0$ , запишем

$$\varphi(s, a) = j\varphi_H \left(\frac{s}{a}\right)^{1-w} \sum_{l=0}^4 \left[ C_l \left(\frac{s}{a}\right)^{(2w)l} \right]. \quad (9)$$

Выражение (9) описывает спираль. Назовем ее *адроидой (hadroida)*, поскольку приближение (1) выведено для адронов. С ограничением (7) адроида описывает траектории адронов и других массивных малоизлучающих частиц, например,  $\mu$ -лептонов.

Учитывая ограничение (7), получаем предельный ( $s = a$ ) экспериментально рассматриваемый угол поворота  $\varphi_A$  (одинаковый для частиц с любой массой!):

$$\varphi_A = j\varphi_H \sum_{l=0}^4 C_l. \quad (10)$$

Уточним, что  $|\varphi_A|$  представляет собой абсолютную величину угла, на который в плоскости  $XY$  независимо от массы частицы ( $\varphi_H$  зависит только от среды и поля) повернется касательная к траектории трека, если частица пройдет (в обратном направлении!) пробег  $s = a$  (или, что то же самое,  $S = A$ , что, в свою очередь, соответствует условию  $T = t$ ).

Таблица 3

$ \overline{H}_z  = 18$ кГс	$H_2$	$C_3H_8$
$\varphi_H$	20,112	5,635
$ \varphi_A $	17,896	5,014

Заметим, что  $|\varphi_A| < \varphi_H$ , и приведем сравнительные значения (рад.) углов  $|\varphi_A|$  и  $\varphi_H$  при средней величине поля 18 кГс, см. табл. 3.

Видно, например, что для пропановой камеры [4] использование адроиды ограничено практически одним ее оборотом, для водородной камеры [3] можно располагать 5–6 оборотами. Таким образом, в дополнение к эквивалентным, зависящим от массы частиц ограничениям (4) и (7) на применение приближения (1), получаем ограничение, от массы не зависящее:

$$\varphi < \varphi_A. \quad (11)$$

Для «коротких» треков имеем  $\frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^{2w} \ll 1$ . В пузырьковых камерах, согласно табл. 2, это соблюдается достаточно часто. В этом случае радикалом в (8) можно пренебречь и тогда вместо (9) получить упрощенное натуральное уравнение адроиды в виде степенной функции:

$$\varphi(s, a) = j\varphi_H \left(\frac{s}{a}\right)^{1-w}. \quad (12)$$

Представим адроиду графически. В системе координат  $(s, \varphi)$  правую полуплоскость заполняет их семейство. На рис. 4, а изображен ряд адроид для магнитного поля  $H_z \sim 15$  кГс в пропановой камере. Подчеркнем, что в натуральных координатах адроиды представляют собой монотонные функции, дифференцируемые всюду, кроме точки  $s = 0$ . Верхний квадрант



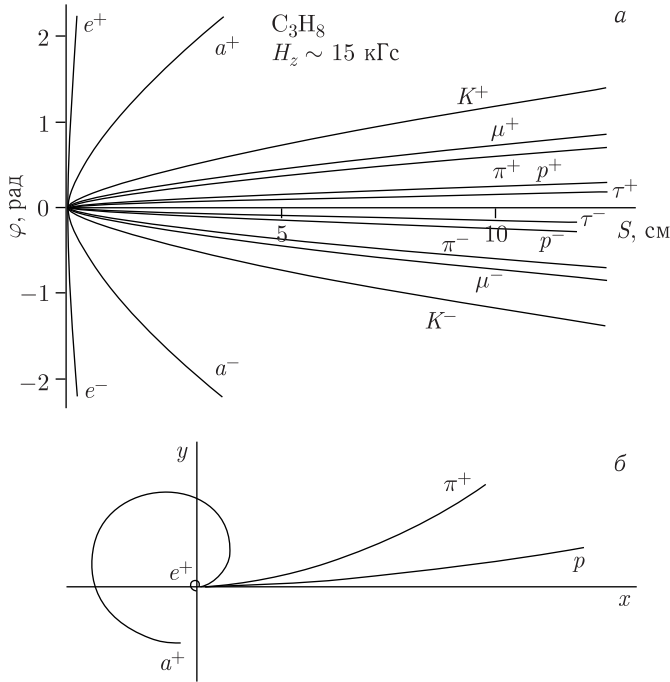


Рис. 4. Адрониды (9): а) для некоторых известных частиц в пропановой камере. Дополнительно показана адроида для воображаемой частицы  $a^\pm$  с массой  $\sim 7,35 \text{ МэВ}/c^2$ ; б) в декартовых координатах

полуплоскости — для частиц с положительным зарядом, нижний — с отрицательным.

По натуральному уравнению адроида (9) или (12) определяются ее текущие декартовы координаты  $x$  и  $y$ :

$$x = \int_0^S \cos(\varphi) ds, \quad y = \int_0^S \sin(\varphi) ds, \quad (13)$$

с помощью которых адроида изображается на плоскости  $XU$ . В декартовых координатах примеры адронид частиц, движущихся в одних и тех же условиях, даны на рис. 4, б где к тому же соблюдено условие (11).

На дальних витках адроида значительно отличается от спирали, по которой движутся реальные — особенно легкие — частицы. Так, на рис. 5 изображены: адроида (12) с большим числом витков и реальная спираль, оставленная в пропановой камере позитроном. Видно, что у адроида дальние витки сближаются, а у реальной траектории — расходятся.

Тем не менее из (9), (12) следует, что если по треку частицы (разумеется, в рамках ограничений, налагаемых эквивалентными ограничения-

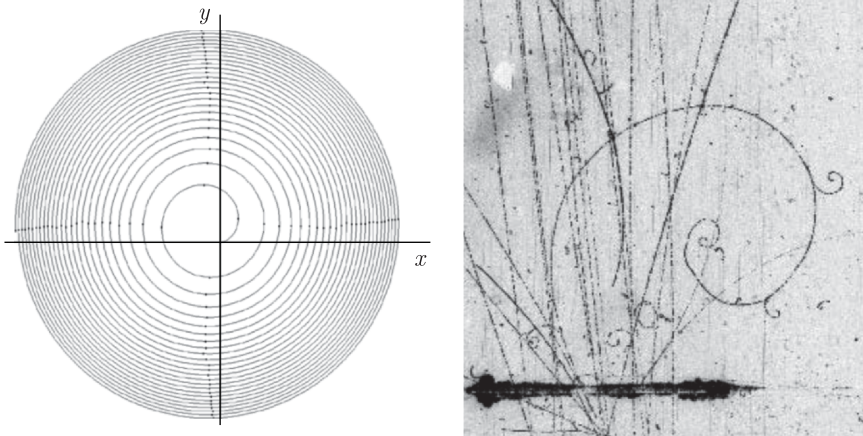


Рис. 5. Адроида (12) (слева) и след позитрона в пропановой камере (фото справа)

ми (4), (7) или (11) определить геометрический параметр  $a$  адроида, то можно получить массу частицы. В самом деле, поскольку

$$a = A \cos \alpha = \frac{\varkappa m}{d} \cos \alpha,$$

то

$$m = \frac{ad}{\varkappa \cos \alpha}. \quad (14)$$

Приближение (1), очевидно, не описывает поведение лептонов. Поэтому формула (14) в случае лептонов может давать искаженное значение массы. Однако, учитывая простоту описания траектории (9), (12) и рассчитывая на получение приближенного (качественного) спектра масс, используем (14) и в этом случае.

Подчеркнем еще раз, что нахождение массы по данной методике носит чисто геометрический характер и не зависит от начальной энергии частицы.

В последующих пунктах, со 2-го по 6-й, подробно излагается методика нахождения массы (точнее — нахождения параметра  $a$  адроида), поэтому в предположении адекватности этой методики данные пункты можно пропустить и сразу перейти к пункту 7.

## 2. ИЗМЕРЕНИЕ СПИРАЛИ

Во время измерения следует применять некоторые приемы, позволяющие уменьшить влияние на определение массы эффектов многократного рассеяния и тормозного излучения. Упрощенно, многократное рассеяние меняет направление импульса частицы (что приводит к излому траектории), а излучение — величину его модуля (что меняет кривизну траектории). Эти эффекты нередко приводят к тому, что траектория частицы

становится заметно отличной от адрониды (и даже вообще от спирали), и определить массу частицы по такой траектории (по описанной в данной работе методике) оказывается невозможным.

Так, последняя видимая точка на треке, взятая по ходу движения частицы (она одновременно является первой при измерениях), может оказаться не «точкой остановки» (при которой должно соблюдаться  $T = 0$ ). Это может случиться, например, по причине выхода частицы за пределы камеры (чаще всего — в верхнее стекло камеры).

Для позитрона в результате акта аннигиляции последняя видимая точка может оказаться точкой преждевременной «остановки» — в момент, когда его кинетическая энергия  $T > 0$  или даже  $T > t$  (что будет противоречить условию выполнения формулы (2)).

Нередко также, когда кинетическая энергия  $T$  частицы становится близка к нулю, движение частицы — особенно легкой — становится хаотичным. Такой трек измерить при помощи описываемой методики невозможно.

Отсюда — считаем трек измеримым, если его конец (по ходу движения частицы) является внешне (на глаз) неповрежденным и принадлежит объему камеры.

Условный пример измеримого трека показан в виде адрониды на рис. 6, где в проекции на плоскость  $(X, Y)$  общей системы координат пузырьковой камеры начало собственных координат  $xOy$  адрониды помещено в истинную, но пока неизвестную точку остановки  $(X_0, Y_0)$  (где  $T = 0$ ) и повернуто на

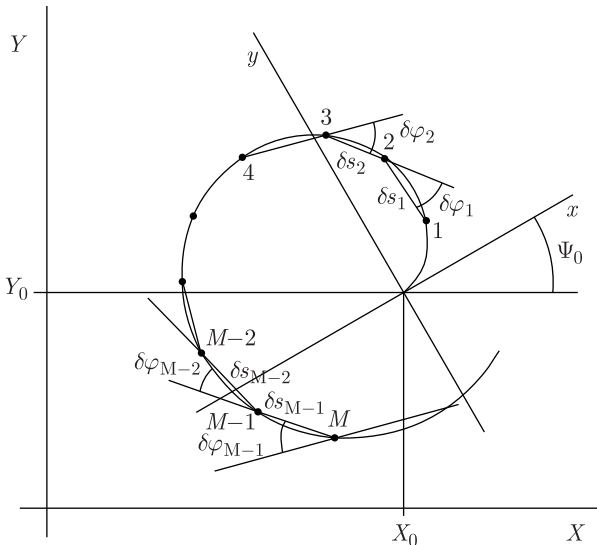


Рис. 6. Измеренные точки трека частицы с положительным зарядом и приращения пробега и угла, измеренные по хордам

пока что неизвестный угол  $\Psi_0$ . Здесь же условно показаны измеренные точки трека.

Пронумеруем эти точки от 1 до  $M$  — в порядке от первой измеренной точки траектории (ближайшей к точке остановки) в направлении, противоположном реальному движению частицы. В результате измерения (выполняемого с помощью измерительной процедуры, представленной в [9]) получим (как случайные независимые нормально распределенные величины) координаты  $(X_i, Y_i, Z_i)$  этих точек и соответствующие величины их ошибок  $\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$ .

Далее, в декартовых координатах  $(X, Y)$  будем оперировать с *ломаной*, представленной точками  $(X_i, Y_i)$ , соединенными отрезками прямых.

В силу того, что манипуляции с адронидой предпочтительнее выполнять в ее натуральном виде (в котором она монотонна), найдем приращения пробега и угла. По общему определению плоской кривой приращение пробега должно определяться длиной соответствующей *дуги*, угловое приращение — углом между *касательными*. Но предварительно найдем значения  $\delta s_i^c$  приращения пробега, беря вместо отрезков дуг соответствующие *хорды* (верхний индекс  $c$  — от chord). Принимая  $\mathbf{R}_i = (X_{i+1} - X_i, Y_{i+1} - Y_i, 0)$ , находим

$$\delta s_i^c = |\mathbf{R}_i| (i = \overline{1, M-1}). \quad (15.1)$$

Полагая  $\delta s_0^c = 0$ , проведем через точки  $\left( \sum_{k=1}^i \delta s_{k-1}^c, Z_i \right)$ ,  $(i = \overline{1, M})$  МНК-прямую. Тогда угол  $\alpha$  ее наклона даст примерное значение  $\cos \alpha$ , которое можно использовать в (14). В декартовых координатах  $(s, Z)$  будем далее оперировать с *ломаной*, представленной точками  $\left( \sum_{k=1}^i \delta s_{k-1}^c, Z_i \right)$ , соединенными отрезками прямых.

Найдем также предварительные (по хордам) значения  $\delta \varphi_i^c$  угловых приращений:

$$\delta \varphi_i^c = \arccos \frac{(\mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i+1})}{|\mathbf{R}_i| |\mathbf{R}_{i+1}|}, \quad (i = \overline{1, M-2}). \quad (15.2)$$

При этом углу  $\delta \varphi_i^c$  придается знак  $Z$ -компоненты векторного произведения  $[\mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i+1}]_Z$ .

Как видно из рис. 6, угловое приращение  $\delta \varphi_{M-1}^c$  является неопределенным.

Формулы для вычисления погрешностей измеренных приращений  $\delta s_i^c$ ,  $\delta \varphi_i^c$ ,  $(i = \overline{1, M-2})$  указываются в приложении В.

Необходимо, однако, найти приращения пробега и угла по дугам и касательным. Можно показать (см. приложение Г), что искомые величины  $\delta s_i$  и  $\delta \varphi_i$   $(i = \overline{1, M-2})$  зависят от абсолютных, но пока неизвестных

значений  $s_i$  пробега и тогда вычисляются по приближительным формулам:

$$\delta\varphi_i = \delta\varphi_i^c \frac{(s_i + \delta s_i)^{1-w} - (s_i)^{1-w}}{(s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}/2)^{1-w} - (s_i + \delta s_i/2)^{1-w}}, \quad (16.1)$$

$$\delta s_i = \delta s_i^c \frac{\delta\varphi_i}{2 \sin \frac{\delta\varphi_i}{2}}. \quad (16.2)$$

### 3. НАХОЖДЕНИЕ МАССЫ

Поскольку траектории частиц в излагаемой методике ограничены предельным углом поворота (10), (11), потребуем, чтобы

$$\sum_{k=1}^{M-2} \delta\varphi_k^c < \varphi_A, \quad (17)$$

и в связи с этим отбросим на траектории дальние точки, если таковые случайно были получены при измерении (что реально возможно только для электронов). Число  $M$  оставшихся экспериментальных точек не должно быть слишком малым. Принимаем  $M \geq M_{\min}$ , где, например,  $M_{\min} = 7$ .

Описываемая далее процедура нахождения массы неустойчиво работает для энергичных частиц, у которых в результате измерительных ошибок точки на треке могут в декартовых координатах составить практически прямую. Для отсечки таких треков

1) рассмотрим те из них, у которых сумма угловых приращений достаточно мала (например,  $\sum_{k=1}^{M-2} \delta\varphi_k^c < 20^\circ$ );

2) проведем через соответствующим образом повернутые точки  $(X_i, Y_i)$ ,  $(i = \overline{1, M})$  МНК-прямую и МНК-параболу;

3) потребуем, чтобы разброс экспериментальных точек относительно МНК-параболы, выражаемый функционалом  $\chi_2^2$ , был меньше, чем соответствующий разброс относительно МНК-прямой, выражаемый функционалом  $\chi_1^2$ . В противном случае трек полагается прямым и отклоняется.

Далее, знак заряда частицы устанавливается следующим образом:

1) если  $\left| \sum_{k=1}^{M-2} \delta\varphi_k^c \right| > 20^\circ$  — по знаку величины  $\sum_{k=1}^{M-2} \delta\varphi_k^c$ ,

2) если  $\left| \sum_{k=1}^{M-2} \delta\varphi_k^c \right| < 20^\circ$  (для слабо искривленных треков) — по знаку

старшего коэффициента указанной выше МНК-параболы.

Если установить  $s_1 = 0$ , то, найдя по формулам (16) приращения пробега и поворота, уже можно предварительно оценить массу частицы. Принимая (12), рассмотрим примерное соотношение

$$\sum_{k=1}^{M-2} \delta\varphi_k \approx j\varphi_H \left( \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{M-2} \delta s_k \right)^{1-w}.$$

Отсюда примерная оценка  $\hat{a}$  параметра  $a$ :

$$\hat{a} = \left[ \frac{j\varphi_H}{\sum_{k=1}^{M-2} \delta\varphi_k} \right]^{1/(1-w)} \sum_{k=1}^{M-2} \delta s_k \quad (18)$$

и, соответственно, оценка массы:  $\hat{m} = (\hat{a}d)/(\varkappa \cos \alpha)$ .

Такая оценка, впрочем, тем эффективней, чем ближе первая измеренная точка к реальной точке остановки. Так, в задаче геометрической реконструкции [8] с помощью подобной оценки идентифицировались частицы (протоны и пионы), для которых предварительно указывалось, что они остановились в объеме пузырьковой (водородной) камеры.

Найдем уточненное значение массы. Для этого используем еще один прием, существенно помогающий уменьшить влияние на результат эффектов многократного рассеяния и излучения. Будем находить массу  $m$  для разного количества оставшихся измеренных точек (т.е. для всех  $i$  от 1 до  $n$ , причем предел  $n$  сам меняется во внешнем цикле от  $M_{\min}$  до  $M$ ), а затем выберем оптимальный результат при некотором  $n = M_{\text{opt}}$ . Таким образом, следующий фрагмент текста от строки «Начало цикла...» вплоть до строки «Конец цикла...» следует понимать как тело цикла при заданном  $n$ .

**Начало цикла для  $n$  от  $M_{\min}$  до  $M$ .**

Назовем точку 1 *ведущей* и запишем парные выражения для (пока неизвестных) значений пробега, угла и их точных приращений:

$$s_i = s_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k, \quad \varphi_i = \varphi_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta\varphi_k, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (19)$$

В натуральных координатах  $(s, \varphi)$  будем далее оперировать с *ломаной*, представленной точками  $(s_i, \varphi_i)$ , соединенными отрезками прямых.

Составим функционал

$$\chi_\varphi^2(s_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\varphi_i - \varphi(s_i)}{\Delta\varphi_i} \right]^2 \quad (20.1)$$

или, подробнее,

$$\chi_\varphi^2(s_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\Delta\varphi_i} \left( \left( \varphi_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta\varphi_k \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - j\varphi_H \left( \frac{s_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k}{a(s_1, \varphi_1)} \right)^{1-w} \sum_{l=0}^4 C_l \left( \frac{s_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k}{a(s_1, \varphi_1)} \right)^{2wl} \right) \right\}^2. \quad (20.2)$$

Установим величину ошибки  $\Delta\varphi_i$ , входящей в выражение для функционала. Численное значение ошибки каждого углового приращения  $\Delta\delta\varphi_i^c$  вычислено ранее. Запишем примерное равенство  $\delta\varphi_i^c \approx \varphi_{i+1} - \varphi_i$  и установим соответствующие дисперсии:

$$\Delta^2(\delta\varphi_i^c) = \Delta^2\varphi_i + \Delta^2\varphi_{i+1} \approx 2\Delta^2\varphi_i.$$

Получим

$$\Delta\varphi_i \approx \frac{\Delta(\delta\varphi_i^c)}{\sqrt{2}} \quad (i = \overline{1, n-2})$$

(примем также  $\Delta\varphi_{n-1} = \Delta\varphi_{n-2}$ ) и будем пользоваться этой оценкой и впредь.

Параметр  $a$  адройды, наилучшим образом соответствующий ломаной, помещенной в точку  $(0,0)$ , найдем, решая в этой точке (трансцендентное) уравнение

$$\frac{\partial\chi_\varphi^2}{\partial a} = 0. \quad (21)$$

Назовем это « $Z$ -решением».  $Z$ -решение найдется для всех треков, успешно прошедших предыдущие проверки. В качестве начального приближения  $a_0$  для  $a$  выберем аналитическое решение того же уравнения, которое получается, если в (20.1) использовать упрощенное (12) уравнение адройды, установив дополнительно  $s_1 = 0, \varphi_1 = 0$ :

$$a_0 = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left(\sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k\right)^{1-w} \left(\sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k\right)^{1-w}}{\Delta^2\varphi_i}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left(\sum_{k=1}^{i-1} \delta\varphi_k\right) \left(\sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k\right)^{1-w}}{\Delta^2\varphi_i}} \right]^{1/1-w}.$$

Последовательные приближения для  $a$  находятся далее численно методом касательных. В результате для найденного  $a$  находится значение функционала  $\chi_\varphi^2$ .

Следует установить, насколько определенным является полученное  $Z$ -решение при заданных величинах ошибок  $\Delta X_i, \Delta Y_i$ . Для этого

- 1) через ломаную (начало которой установлено в точку  $(0,0)$ ) проводится МНК-прямая  $\varphi_L = \varphi_0 + \overline{(d\varphi/ds)}s$ ,
- 2) вычисляется величина  $\chi_L^2$  ломаной относительно этой прямой,
- 3) сравниваются величины  $\chi_L^2$  и  $\chi_\varphi^2$ .

В результате может оказаться, что  $\chi_L^2 \leq \chi_\varphi^2$ . Это означает, что данная ломаная в натуральных координатах лучше соответствует прямой, нежели адройде. Но из этого следует, что при имеющейся точности измерений с помощью данной ломаной не различается разность кривизн даже на начальном отрезке адройды. Массу при этом определить невозможно, и потому такое решение отбрасывается.

Если же окажется, что  $\chi_\varphi^2 < \chi_L^2$ , то и в этом случае полученное  $Z$ -решение может, тем не менее, оказаться неприемлемым, если в натуральных координатах первая точка ломаной на самом деле далека от точки остановки (ведь мы только для пробы поместили ломаную в точку  $(0,0)$ );  $Z$ -решение в этот момент временно запоминается вплоть до выяснения последнего обстоятельства.

Подчеркнем, что для любой адрониды любой ее конечный отрезок обладает уникальным соотношением приращений пробега и угла, то есть, такой отрезок нельзя совместить ни с каким другим отрезком никакой иной адрониды. С другой стороны, измеренные приращения  $(\delta s_i^c, \delta \varphi_i^c)$  дают ломаную, полученную на некотором конечном отрезке траектории, и этой ломаной должен соответствовать некоторый отрезок искомой адрониды. Следовательно, на плоскости  $(s, \varphi)$  для заданной ломаной можно попытаться подобрать место (отличное от точки  $(0,0)$ ), в котором она *наилучшим* образом будет соответствовать некоторой теоретической адрониде. Если такой подбор выполнится, то это будет означать, что ломаная отдалена от точки остановки, и найденная ранее по  $Z$ -решению масса будет некорректной. Именно это и необходимо проверить. Через полноценную минимизацию функционала (20) будем отыскивать значения  $s_1$  и  $\varphi_1$ , соответствующие *наилучшему* положению ломаной.

Заметим, что поверхность, задаваемая функционалом (20), представляет собой *склоны оврага*, дно которого почти «горизонтально», слабо искривлено примерно по направлению пучка близких адронид и в некоторой точке имеет «едва заметный» абсолютный минимум. Нахождение минимума функционала (20) предполагает численное решение системы

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi_\varphi^2}{\partial s_1} = 0, \\ \frac{\partial \chi_\varphi^2}{\partial \varphi_1} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

относительно переменных  $s_1$  и  $\varphi_1$ . В качестве начального приближения  $(s_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)})$  для них устанавливается, прежде всего, «нулевое»  $(0, 0)$ . Если с таким начальным приближением минимум не находится, испытываются другие (до первого найденного), например,  $s_1^{(k)} = \sum_{i=1}^k \delta s_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; при этом угол  $\varphi_1^{(k)}$  принимается вычисленным по формуле (9) для  $s_1^{(k)}$  и для параметра  $a$ , найденного из решения системы (22).

Для выполнения итерационной процедуры минимизации вводятся вектор-переменная  $\mathbf{x} = (s_1, \varphi_1)^T$  и вектор-функция  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial \chi_\varphi^2}{\partial s_1}, \frac{\partial \chi_\varphi^2}{\partial \varphi_1} \right)^T$ .



Приближения выполняются по методу Ньютона:

$$\mathbf{x}_{i+1} \leftarrow \mathbf{x}_i - \left[ \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)}{d\mathbf{x}} \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i). \quad (23)$$

Регулярные итерации считаются успешно завершёнными, если дважды подряд выполнится условие

$$\left( (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \right) < \varepsilon_x.$$

При этом регулярная процедура минимизации имеет особенности (см. приложение Д).

В итоге — в процессе минимизации ломаная (19), совершая *плоскопараллельное* движение, может переместиться из начального положения в сторону минимума, что даст «*N*-решение», в котором для найденной точки  $(s_1, \varphi_1)$  определяется параметр  $a$  адроида и, следовательно, масса частицы.

Но *N*-решение противоречит требованиям (4), (7) или (11), поэтому и его, и ранее полученное *Z*-решение придется в этом случае отвергнуть.

Пример минимизации дается на рис. 7. Для наглядности выбран реальный случай, при котором первая измеренная точка в результате последующей минимизации оказывается значительно удаленной от точки остановки. При этом непосредственно видно, что значение функционала  $\chi_\varphi^2$  в начальном положении больше соответствующего значения в минимуме. Это и означает, что ранее полученным *Z*-решением пользоваться нельзя.

Получается, что следствие из достижения минимума необычно: полученный результат отклоняется. Важнее противоположное: если минимизация не проходит, это будет означать, что ломаная начинается действительно в точке остановки, что ведет к утверждению ранее полученного *Z*-решения.

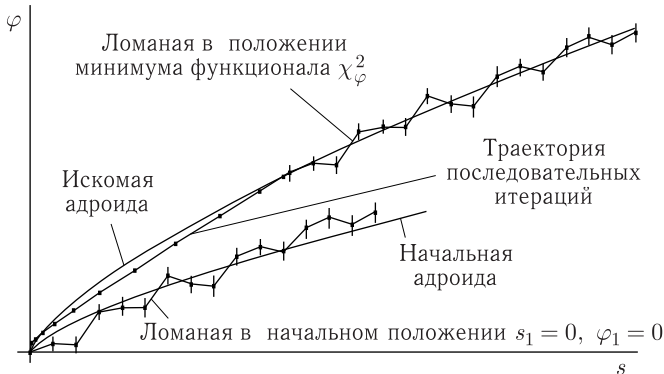


Рис. 7. Ломаная (19), построенная по измеренным точкам трека в координатах  $(s, \varphi)$ , перемещается из начального положения  $s_1 = 0, \varphi_1 = 0$  в положение минимума

Таким образом, если  $Z$ -решение принимается, значение найденного при этом параметра  $a$  дает по формуле (14) массу  $m$ . Получим также выражение для ее ошибки:

$$\Delta m = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial a}\right)^2 \Delta^2 a + \left(\frac{\partial m}{\partial \cos \alpha}\right)^2 \Delta^2 \cos \alpha} = \left(\frac{d}{\varkappa \cos \alpha}\right) \sqrt{\Delta^2 a + \left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^2 \Delta^2 \cos \alpha} \quad (24)$$

(вывод приближенного значения дисперсии  $\Delta^2 a$  приводится в приложении Е).

**Конец цикла для  $n$  от  $M_{\min}$  до  $M$ .**

При выполнении данного цикла для некоторых значений переменной  $n$  находятся и запоминаются массы  $m_n$ . После цикла принимается масса, найденная при  $n = M_{\text{opt}}$ , когда достигается минимальное значение величины  $\chi_\varphi^2/\chi_L^2$ , т. е. когда ломаная наиболее похожа на адрюиду.

Для дальнейшего (в том числе, визуального) контроля результатов нахождения адрюиды по формулам (13) находятся ее собственные декартовы координаты  $(xy)$ . Адрюида изображается в декартовых координатах  $(XY)$  и при этом совмещается с декартовой же ломаной (рис. 6). Для этого предварительно определяются величины  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $k$ , и  $\Psi_0$ , входящие в линейные преобразования из  $(xy)$  в  $(XY)$ :

$$\begin{cases} X = X_0 + k(x \cos \Psi_0 - y \sin \Psi_0), \\ Y = Y_0 + k(x \sin \Psi_0 + y \cos \Psi_0). \end{cases} \quad (25)$$

С этой целью на плоскости  $(s\varphi)$  последовательными приближениями находятся две точки, принадлежащие ломаной (в положении решения) и одновременно — найденной адрюиде (такие точки должны существовать). Для декартовых координат (13) двух этих точек составляются выражения (25), что дает 4 линейных уравнения с четырьмя неизвестными, из которых находятся величины  $k$ ,  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $\Psi_0$ . Найденная величина  $k$  должна быть близка к единице (что контролируется).

#### 4. О ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть требуется определять массу  $m$  с относительной ошибкой, не превосходящей  $\Delta m/m$ . Возьмем фрагмент измеренной ломаной с тремя соседними точками и представим его окружностью радиуса  $R$  с хордой  $L$  и стрелой прогиба  $h$ . Имеем примерное соотношение

$$R = \frac{L^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

Измерения на треке можно представить последовательным измерением стрел прогиба  $h$  на разных участках трека. В зависимости от ошибки измерения  $\Delta h$  установим соответствующую величину ошибки  $\Delta R$ :

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial h} \right| \Delta h = \left| -\frac{L^2}{8h^2} + \frac{1}{2} \right| \Delta h.$$

Для очевидного диапазона  $h \leq L/2$

$$\Delta R = \left( \frac{L^2}{8h^2} - \frac{1}{2} \right) \Delta h,$$

и тогда имеем относительную ошибку радиуса

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\frac{L^2}{8h^2} - \frac{1}{2}}{\frac{L^2}{8h} + \frac{1}{2}} \Delta h = \frac{1}{h} \frac{L^2 - 4h^2}{L^2 + 4h^2} \Delta h.$$

Для малых  $h$  получаем  $\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\Delta h}{h}$ . Но из (4) следует  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\Delta h}{h}$ . Тогда, полагая, что ошибка  $\Delta X$  измерения пространственной координаты  $X$  (рассуждения верны и для координаты  $Y$ ) соответствует ошибке  $\Delta h$  измерения стрелы прогиба, т. е.  $\Delta h \sim \Delta X$ , можем получить оценку

$$\frac{\Delta m}{m} \leq \frac{\Delta X}{\bar{h}},$$

где  $\bar{h}$  — усредненное значение стрелы прогиба для данного трека. Например, для измерений на пропане (см. далее) величина  $\bar{h}$  для электронов имеет порядок 0,05 см,  $\Delta X \leq 0,01$  см. Тогда получим  $\Delta m/m \leq 0,2$ .

## 5. ПРОВЕРКА АЛГОРИТМА НА МАТЕРИАЛЕ 1-М ВОДОРОДНОЙ КАМЕРЫ

Изложенная процедура нахождения массы была протестирована на выборке в 6544 трека ранее накопленных данных (3-лучевые события  $np$ -взаимодействия при импульсе налетающего нейтрона  $p_n \sim 5,2$  ГэВ/с [10], полученных на 1-метровой водородной пузырьковой камере ЛВЭ [3]). Согласно этому, непосредственного измерения треков по фотографиям водородной камеры не проводилось — вместо этого использовались вычисляемые в программе «1-6» [8] промежуточные величины: координаты  $(X_i, Y_i, Z_i)$  точек трека и соответствующие им значения напряженности магнитного поля  $H z_i$ .

Согласно геометрической реконструкции и последующему фитированию (которые проводились в рамках  $np$ -эксперимента), в наборе таких частиц, остановившихся в объеме камеры, имелись протоны  $p$  и положительно заряженные пионы  $\pi^+$ . Масса частицы находилась по описанной в данной работе процедуре независимо от этого знания. При калибровке использовалось соотношение, приведенное в замечании 3 приложения Ж.

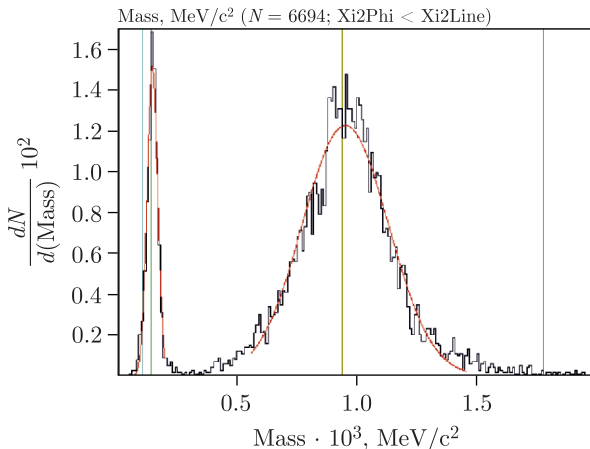


Рис. 8. Распределение масс: левый (1-й) пик — пионы, правый (2-й) — протоны

Полученное распределение масс вместе с указанием положения табличных значений масс пионов и протонов приводится на рис. 8.

Оба пика были аппроксимированы гауссовой кривой, что дало значения масс

$$m_1 = (146,1 \pm 4,7) \text{ МэВ}/c^2,$$

$$m_2 = (952,1 \pm 13,4) \text{ МэВ}/c^2,$$

соответствующее в пределах ошибок табличным значениям  $m_\pi$  и  $m_p$ .

## 6. ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ МАСС

Массы частиц для треков с фотографий пропановой камеры [4] при облучении ее протонами находились после измерения по программе visualMetro [9]. На рис. 9–15 для каждого примера определения массы частицы даются четыре изображения:

1) фрагмент окна измерительной программы с размеченным измеренным треком; могут быть видны другие треки и реперные кресты;

2) в декартовых координатах  $(X, Y)$  пузырьковой камеры — совмещение ломаной с полученной МНК-адрой (красным), для которой изображены ее собственные декартовы оси координат  $(x, y)$ ;

3) в декартовых координатах  $(s, Z)$  — ломаная (точка остановки — голубым) и проведенная через нее МНК-прямая (красным);

4) в натуральных координатах  $(s, \varphi)$  — ломаная (точка остановки — голубым), проведенная через нее МНК-адрой (красным), адрой для некоторых частиц стандартной модели (электрон/позитрон — синим, мюон — голубым, пион — зеленым, каон — фиолетовым, протон — желтым), а также — для воображаемой частицы  $a^\pm$  с массой  $\sim 7,35 \text{ МэВ}/c^2$  (серым).

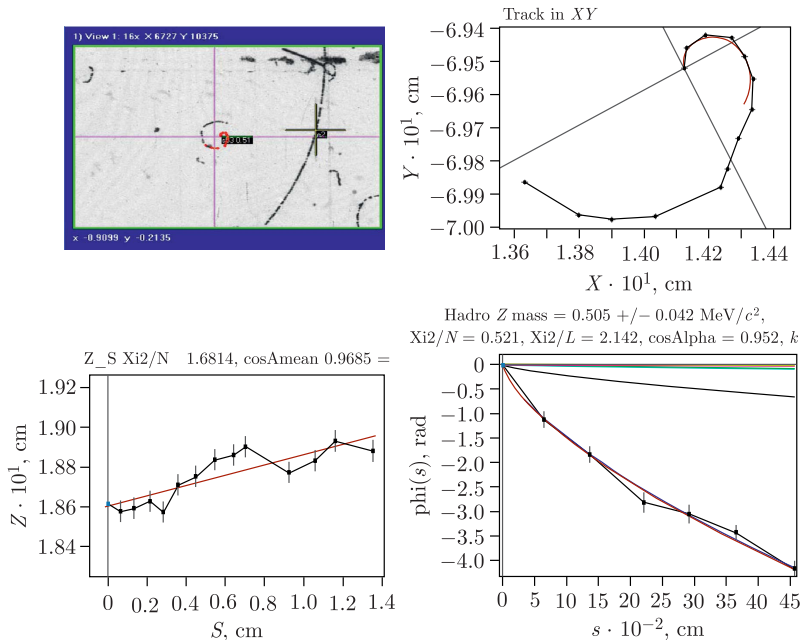


Рис. 9. Электрон. Трек 913\_973\_s03.  $m = (0,51 \pm 0,04) \text{ МэВ}/c^2$

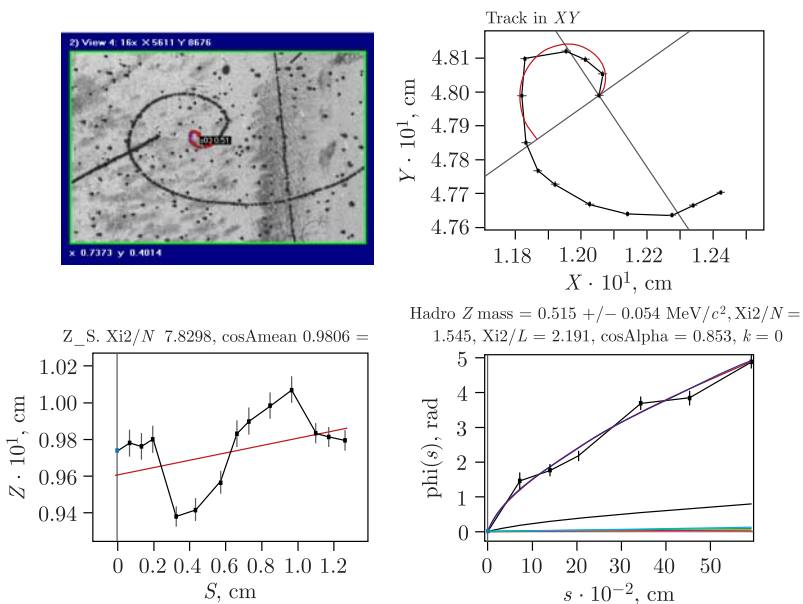


Рис. 10. Позитрон. Трек 816\_008\_s03.  $m = (0,51 \pm 0,05) \text{ МэВ}/c^2$

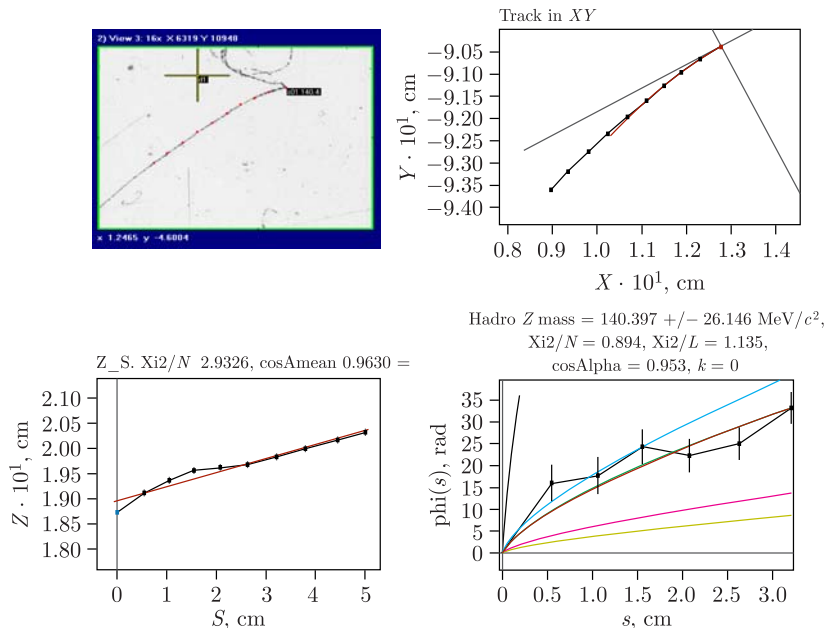


Рис. 11. Пион  $\pi^+$  в распаде  $\pi^+ \mu^+ e^+$ . Трек 949\_549\_s01.  $m = (140,4 \pm 26,1) \text{ МэВ}/c^2$

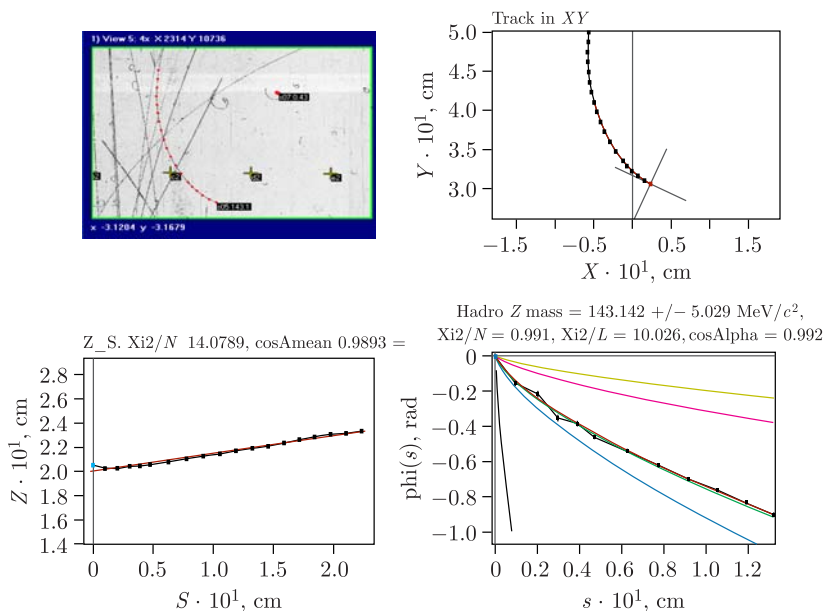


Рис. 12. Пион  $\pi^-$ . Трек 909\_050\_s05.  $m = (143,3 \pm 5,0) \text{ МэВ}/c^2$

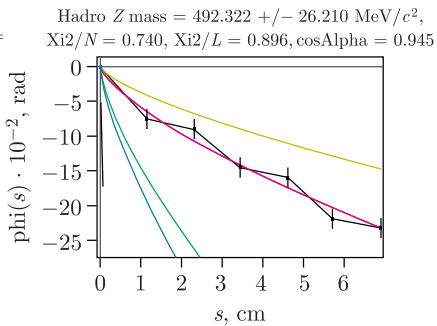
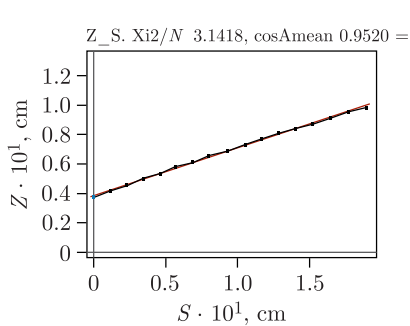
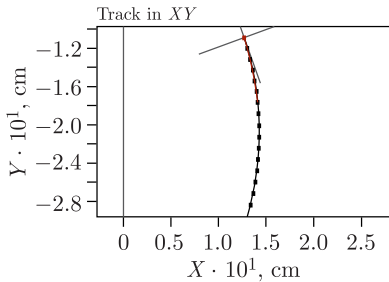


Рис. 13. Каон  $K^-$ . Трек 908\_180\_s05.  $m = (492,3 \pm 26,2) \text{ МэВ}/c^2$

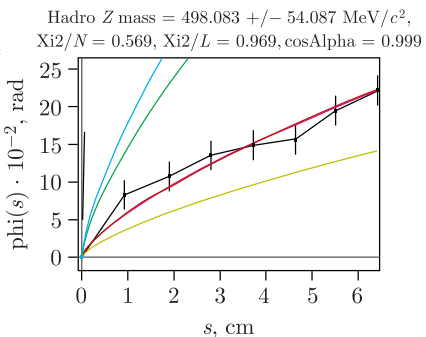
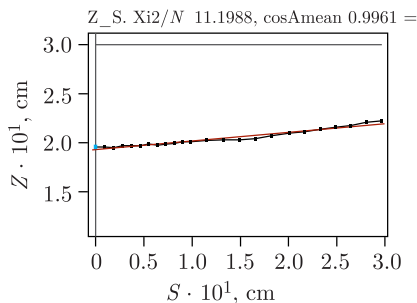
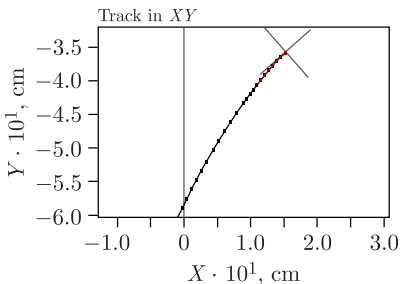


Рис. 14. Каон  $K^+$ . Трек 913\_174\_s03.  $m = (498,1 \pm 54,1) \text{ МэВ}/c^2$

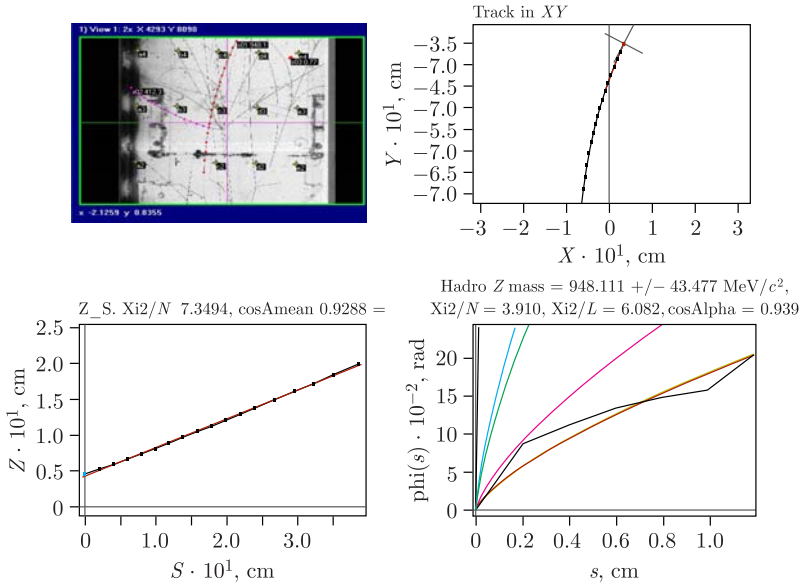


Рис. 15. Протон  $p$ . Трек 917\_850\_s01.  $m = (948,1 \pm 43,5) \text{ МэВ}/c^2$

## 7. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ НА ФОТОГРАФИЯХ С ПРОПАНОВОЙ КАМЕРЫ

На рис.16 представлены два распределения вычисленных масс  $[\text{МэВ}/c^2]$  по рассчитанным адроидам. Спектры получены после обработки 742 кадров с разных пленок. При этом было отобрано 1474 трека, пригодных для измерения по описываемой методике. На гистограммах вертикальными прямыми слева направо с цветами, как в п. 6, показаны положения основных табличных масс, а также — для воображаемой частицы  $a^\pm$  с массой  $\sim 7,35 \text{ МэВ}/c^2$  (красным).

В спектр на рис.16,а помещены все массы, полученные в  $Z$ - или  $N$ -решениях. Слева направо наблюдаются экспериментальные: а) пик электронов/позитронов, б) неразделенный пик мюонов и пионов, с) неразделенный пик каонов, протонов и дейтонов. Наблюдается также куполообразное возвышение в диапазоне масс примерно от 5 до 50  $\text{МэВ}/c^2$ . Дополнительно (желтым) в распределении показана доля положительно заряженных частиц.

На спектре рис.16,б присутствуют только избранные массы (их всего 726). Для них выполнено три ограничения (см. приложение 3; в наших дальнейших рассуждениях эти ограничения — не главное):

- 1) относительная ошибка массы  $\delta m < 0,25$ ;
- 2) оставлены только  $Z$ -решения;
- 3) ломаная ближе к адроиде, чем к прямой ( $\chi_\varphi^2 < \chi_L^2$ ).



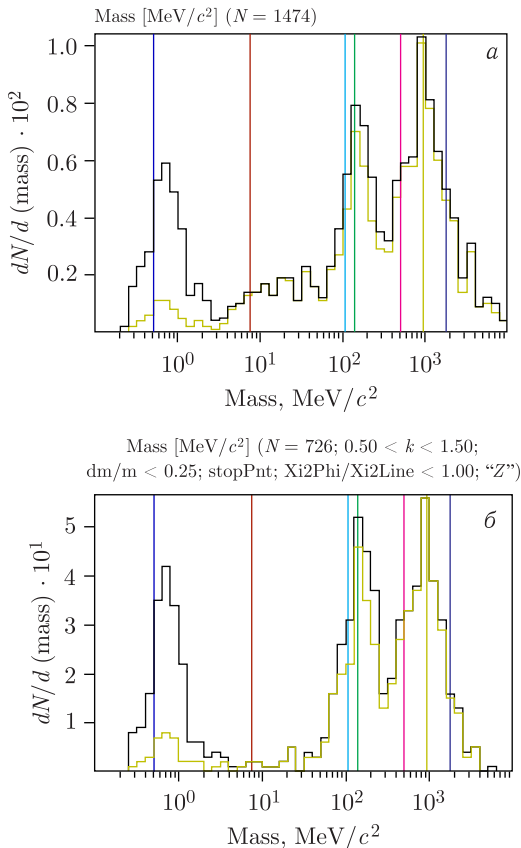


Рис. 16. Распределение: а) всех вычисленных масс (логарифмическая шкала); б) отобранных вычисленных масс (логарифмическая шкала)

*Главное же* — в спектре на рис. 16, б не были помещены массы для особого случая — для треков, оставленных *положительно* заряженными частицами в диапазоне масс от 5 до 50 МэВ/с<sup>2</sup> характерной кривизны с неповрежденным концом. Наглядная особенность кривизны таких треков в том, что она (кривизна) занимает явно промежуточное место между кривизной треков от электронов/позитронов, закручивающихся в маленькую спираль, и значительно меньшими кривизнами, оставляемыми треками от пионов/мюонов. Пример сразу с тремя такими характерными треками приведен на рис. 17.

Возникал вопрос о природе частиц, давших такие треки. Либо это были позитроны, преждевременно (ввиду аннигиляции) «остановившиеся» в объеме камеры (в материальной среде из возможных у нас заряженных частиц аннигилируют только позитроны), либо некие частицы (лептоны?)

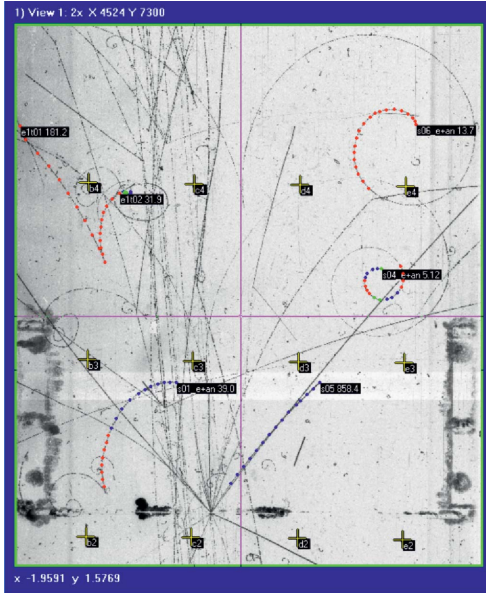


Рис. 17. Три специфических трека в рабочем окне программы visualMetro [9]. Событие 908\_006. Треки обозначены идентификаторами s01\_e+an, s04\_e+an и s06\_e+an. Видны также иные треки s05 и s07 и реперные кресты

с массой порядка  $10^1$  МэВ/ $c^2$ . И вот, у показанных на рис. 17 позитронов формально вычисленные массы соответствуют табл. 4.

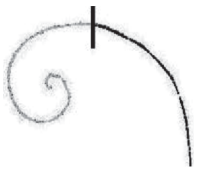
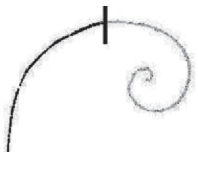



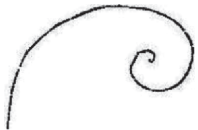

Таблица 4

Идентификатор трека	Формально вычисленная (завышенная) масса, МэВ/ $c^2$
s01_e+an	39,0
s04_e+an	5,12
s06_e+an	13,7

Однако предположение, что часть таких треков может являться треками от лептона аномальной массы, не нашло подтверждения, поскольку в исследовавшейся выборке из 1474 треков не было найдено *ни одного* трека характерной кривизны, с неповрежденным концом и с *отрицательным* зарядом. Так, все видимые треки электронов ( $e^-$ ) заканчивались либо сверткой в маленькую спираль при  $T = 0$  (случай измеримый), либо такой же сверткой, но с хаотическим движением или какими-либо взаимодействиями при  $T$  около 0, либо «уходом в стекло».

Эти наблюдения схематически представлены в табл.5 для треков от электронов и позитронов, встретившихся на общей выборке в 1474 трека.

Таблица 5

Наблюдение	Электрон	Позитрон
Траектории ограничены верхним стеклом камеры при $Z \approx 0$ . Точки остановки не достигаются. Треки не измеряются.		
Траектории ограничены нерегистрируемым взаимодействием. Точки остановки не достигаются. Треки не измеряются.		
Траектории заканчиваются остановкой. Треки измеряются, массы вычисляются.		
Траектория позитрона предположительно заканчивается аннигиляцией. Считается, что точка остановки не достигнута. Треки измеряются, массы формально вычисляются, но в итоговое распределение не включаются. Аналогичные траектории электрона не обнаружены.		 трек 816_008_s03

Но раз в выборке не нашлось *отрицательно* заряженных аномальных лептонов, то следовала *большая вероятность* того, что не нашлось и *положительно* заряженных и что характерные «положительные треки» на самом деле *оставлены аннигилировавшими позитронами*.

Как правило, треки позитронов легко идентифицируются визуально, поскольку они рождаются в хорошо видимых парах  $e^+e^-$  либо в распадах  $\pi^+\mu^+e^+$ . Ранее, на рис. 5 (справа), был показан (нечастый, впрочем) случай позитрона из пары  $e^+e^-$ , завертешегося до полной потери кинетической энергии. Такие позитроны внесли небольшой вклад (показано желтым) в левый пик на рис. 16, а, б.

Чаще позитроны, летящие в среде (жидкий водород или пропан), аннигилируют. При этом их треки, как правило, имеют аккуратные (неповрежденные) концы; но эти концы — вследствие аннигиляции — удалены на неизвестное расстояние от точки остановки. Поэтому их масса по описанной методике не определяется. Если все же попытаться найти ее, она формально будет завышаться (что можно показать), что и дало на

рис. 16, а куполообразное возвышение, в котором отсутствуют массы от отрицательно заряженных частиц.

Чтобы избежать размещения в итоговом спектре масс явно завышенных величин (в диапазоне масс от 5 до 50 МэВ/ $c^2$ ), аннигилировавшие позитроны, встретившиеся во время измерения, специальным образом метились — к наименованию трека добавлялась подстрока «e+ap». Для треков, в названии которых имелась такая подстрока, их масса просто не помещалась в итоговый спектр (гистограмму) на рис. 16, б. Небольшое число предположительно позитронов идентифицировать все же не удалось. Их завышенные массы составляют небольшой фон между пиками электронов/позитронов и мюонов/пионов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вывод: на представленной выборке исследованных треков и при использовании представленного метода определения массы заряженной частицы аномальный лептон с массой  $\sim 10^1$  МэВ/ $c^2$  не обнаружен.

Предложенная методика может, ввиду своей относительной простоты и при наличии достаточной выборки, служить подспорьем для задачи кинематического анализа и оценочным инструментом для определения спектра масс в камерных экспериментах.

**Благодарности.** На первых этапах данная задача была поставлена и развивалась в тесном сотрудничестве с М. Х. Аникиной, В. А. Никитиным и В. С. Рихвицким. Задача многократно обсуждалась с Г. Агикишиевым, А. А. Балдиным, А. П. Иерусалимовым, А. Ю. Трояном и другими сотрудниками ЛВЭ. Г. С. Покаташкин предоставлял данные моделирования geant, А. Ю. Троян и А. В. Белобородов обеспечили сканирование фотографий пропановой камеры.

## Приложение А

Обозначим  $1,75 = 1/(2w)$ , откуда  $w = 2/7$ ; примем  $c = 1$ ; переобозначив кинетическую энергию как  $T$ , воспользуемся соотношением  $T = \sqrt{p^2 + m^2} - m$ , где  $p$  — импульс. Введем явное обозначение  $d$  для плотности. Обозначим числовой коэффициент в (1) в виде  $\varkappa$  с размерностью (г/МэВ)/см<sup>2</sup>.

## Приложение Б

Сделаем замену  $t = \frac{s}{a}$ :

$$\varphi(s) = \frac{j |\overline{H}_z|}{H_0} \int_0^{s/a} \frac{dt}{t^w \sqrt{1 + \frac{1}{2}t^{2w}}}.$$

Если  $\frac{1}{2}t^{2w} < 1$  (что заведомо выполняется при соблюдении условия (7)), то, согласно известному разложению

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots \quad (|x| < 1),$$

записываем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}t^{2w}}} &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^{2w}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}t^{2w}\right)^2 - \\ &\quad - \frac{5}{16}\left(\frac{1}{2}t^{2w}\right)^3 + \frac{35}{128}\left(\frac{1}{2}t^{2w}\right)^4 - \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{4}t^{2w} + \frac{3}{32}t^{4w} - \frac{5}{128}t^{6w} + \frac{35}{2048}t^{8w} - \dots \end{aligned}$$

Тогда подынтегральное выражение в (8) представляется в виде

$$\frac{1}{t^w \sqrt{1+\frac{1}{2}t^{2w}}} = t^{-w} - \frac{1}{4}t^w + \frac{3}{32}t^{3w} - \frac{5}{128}t^{5w} + \frac{35}{2048}t^{7w} - \dots$$

и интегрируется:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^w \sqrt{1+\frac{1}{2}t^{2w}}} &= \frac{t^{-w+1}}{-w+1} - \frac{1}{4} \frac{t^{w+1}}{w+1} + \frac{3}{32} \frac{t^{3w+1}}{3w+1} - \\ &\quad - \frac{5}{128} \frac{t^{5w+1}}{5w+1} + \frac{35}{2048} \frac{t^{7w+1}}{7w+1} - \dots (+C). \end{aligned}$$

## Приложение В

Погрешности измеренных приращений  $\delta s_i^c$ ,  $\delta \varphi_i^c$ , ( $i = \overline{1, n-2}$ ) вычисляются по формулам

$$\Delta \delta s_i^c = \left[ \left( \frac{\partial \delta s_i^c}{\partial X_i} \right)^2 \Delta^2 X_i + \left( \frac{\partial \delta s_i^c}{\partial X_{i+1}} \right)^2 \Delta^2 X_{i+1} + \left( \frac{\partial \delta s_i^c}{\partial Y_i} \right)^2 \Delta^2 Y_i + \left( \frac{\partial \delta s_i^c}{\partial Y_{i+1}} \right)^2 \Delta^2 Y_{i+1} \right]^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta \varphi_i^c &= \left[ \left( \frac{\partial \delta \varphi_i^c}{\partial X_i} \right)^2 \Delta^2 X_i + \left( \frac{\partial \delta \varphi_i^c}{\partial X_{i+1}} \right)^2 \Delta^2 X_{i+1} + \left( \frac{\partial \delta \varphi_i^c}{\partial X_{i+2}} \right)^2 \Delta^2 X_{i+2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \delta \varphi_i^c}{\partial Y_i} \right)^2 \Delta^2 Y_i + \left( \frac{\partial \delta \varphi_i^c}{\partial Y_{i+1}} \right)^2 \Delta^2 Y_{i+1} + \left( \frac{\partial \delta \varphi_i^c}{\partial Y_{i+2}} \right)^2 \Delta^2 Y_{i+2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

(последняя формула не действует для редкого случая  $\delta \varphi_i^c = 0$ ).

## Приложение Г

Раскроем (15.2):

$$\begin{aligned} \delta\varphi_i^c &= \arccos \frac{(X_{i+1} - X_i)(X_{i+2} - X_{i+1}) + (Y_{i+1} - Y_i)(Y_{i+2} - Y_{i+1})}{\sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2} \sqrt{(X_{i+2} - X_{i+1})^2 + (Y_{i+2} - Y_{i+1})^2}} = \\ &= \arccos \frac{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1}) + (y_{i+1} - y_i)(y_{i+2} - y_{i+1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (y_{i+2} - y_{i+1})^2}}. \end{aligned}$$

Используем упрощенное (12) описание адрониды. Тогда, согласно (13), можно записать

$$\begin{aligned} x_i &= \int_0^{s_i} \cos \left( j\varphi_H (s/a)^{1-w} \right) ds, \\ x_{i+1} &= x_i + \int_{s_i}^{s_i + \delta s_i} \cos \left( j\varphi_H (s/a)^{1-w} \right) ds \approx \\ &\approx x_i + \cos \left( j\varphi_H ((s_i + \delta s_i/2)/a)^{1-w} \right) \delta s_i, \\ x_{i+2} &= x_{i+1} + \int_{s_i + \delta s_i}^{s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}} \cos \left( j\varphi_H (s/a)^{1-w} \right) ds \approx \\ &\approx x_{i+1} + \cos \left( j\varphi_H ((s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}/2)/a)^{1-w} \right) \delta s_{i+1}, \\ y_i &= \int_0^{s_i} \sin \left( j\varphi_H (s/a)^{1-w} \right) ds, \\ y_{i+1} &= y_i + \int_{s_i}^{s_i + \delta s_i} \sin \left( j\varphi_H (s/a)^{1-w} \right) ds \approx \\ &\approx y_i + \sin \left( j\varphi_H ((s_i + \delta s_i/2)/a)^{1-w} \right) \delta s_i, \\ y_{i+2} &= y_{i+1} + \int_{s_i + \delta s_i}^{s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}} \sin \left( j\varphi_H (s/a)^{1-w} \right) ds \approx \\ &\approx y_{i+1} + \sin \left( j\varphi_H ((s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}/2)/a)^{1-w} \right) \delta s_{i+1}. \end{aligned}$$

Подставляем приближенные значения интегралов в последнее выражение для  $\delta\varphi_i^c$ :

$$\begin{aligned} \delta\varphi_i^c &= \arccos \times \\ &\times \left( \frac{\cos \left( j\varphi_H \left( (s_i + \delta s_i/2)/a \right)^{1-w} \right) \delta s_i \cos \left( j\varphi_H \left( (s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}/2)/a \right)^{1-w} \right) \delta s_{i+1} + \sin \left( j\varphi_H \left( (s_i + \delta s_i/2)/a \right)^{1-w} \right) \delta s_i \sin \left( j\varphi_H \left( (s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}/2)/a \right)^{1-w} \right) \delta s_{i+1}}{\delta s_i \delta s_{i+1}} \right) = \\ &= \arccos \left( \cos \left[ j\varphi_H \left( (s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}/2)/a \right)^{1-w} - j\varphi_H \left( (s_i + \delta s_i/2)/a \right)^{1-w} \right] \right). \end{aligned}$$

Получаем, помимо (15.2), еще одни — но уже в натуральных координатах — выражения для угловых приращений, вычисляемых пока что по хордам:

$$\delta\varphi_i^c = \frac{j\varphi_H}{a^{1-w}} \left[ (s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}/2)^{1-w} - (s_i + \delta s_i/2)^{1-w} \right].$$

С другой стороны, аналогичные приращения, вычисляемые по касательным, согласно (12), выглядят так:

$$\delta\varphi_i = \frac{j\varphi_H}{a^{1-w}} \left[ (s_i + \delta s_i)^{1-w} - (s_i)^{1-w} \right].$$

Отсюда получим искомое угловое приращение:

$$\delta\varphi_i = \delta\varphi_i^c \frac{(s_i + \delta s_i)^{1-w} - (s_i)^{1-w}}{(s_i + \delta s_i + \delta s_{i+1}/2)^{1-w} - (s_i + \delta s_i/2)^{1-w}}$$

(ясно, что  $\delta\varphi_i > \delta\varphi_i^c$ ), после чего уточняются (до дуги) и приращения пробега:

$$\delta s_i = \delta s_i^c \frac{\delta\varphi_i}{2 \sin \frac{\delta\varphi_i}{2}}$$

(кроме редкого случая  $\delta\varphi_i^c = 0$ , при котором приращение пробега уточнять не нужно).

## Приложение Д

*Особенность 1.* Каждый шаг итерационного процесса (23) выполняется при некотором текущем значении  $s_1$ . И здесь, при каждом вновь заданном  $s_1$ , появляется возможность (и необходимость) определить приращения пробега и угла не по хордам (15), а по касательным и дугам (16). Уточнения тем существенней, чем ближе  $s_1$  к нулю (к точке остановки); они являются отнюдь не второстепенной, а наоборот — необходимой составляющей рассматриваемого алгоритма нахождения массы.

*Особенность 2.* При последовательных приближениях требуется находить первые и вторые производные от функционала (20) по переменным  $(s_1, \varphi_1)$ . Нахождение этих производных требует, однако, учитывать, что параметр  $a$  адройды, «наилучшим образом» проходящей через конкретное положение ломаной, сам зависит от этого положения, т. е., от текущего значения переменных  $(s_1, \varphi_1)$ . С учетом вида формулы (9) это делает невозможным получение аналитических формул для производных. Производные вычисляются численно. Кроме того, ввиду очевидных ограничений

$$s_1 \geq 0, \quad j\varphi_1 \geq 0,$$

численные производные берутся правосторонними, например,

$$\frac{\partial \chi_\varphi^2}{\partial s_1} \approx \frac{\chi_\varphi^2(s_1 + \varepsilon_s, \varphi_1, a(s_1 + \varepsilon_s, \varphi_1)) - \chi_\varphi^2(s_1, \varphi_1, a(s_1, \varphi_1))}{\varepsilon_s}$$

(где  $\varepsilon_s$  — шаг численного дифференцирования). При этом значения параметра  $a$  вычисляются предварительно решением уравнения (21). Начальное значение  $a_0$  при этом приобретает вид

$$a_0 = \left[ j\varphi_H \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left(s_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k\right)^{1-w} \left(s_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k\right)^{1-w}}{\Delta^2 \varphi_i}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left(\varphi_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta \varphi_k\right) \left(s_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k\right)^{1-w}}{\Delta^2 \varphi_i}} \right]^{\frac{1}{1-w}}. \quad (26)$$

Полученная величина  $a$  подставляется в формулу для нахождения  $\chi_\varphi^2$  в соответствующей формуле производной.

## Приложение Е

Чтобы избежать громоздких выкладок при определении дисперсии  $\Delta^2 a$ , входящей в формулу (24), выражение (26) для оценки параметра  $a$  представим в упрощенном виде. Полагая близкими по величине приращения  $\delta s_i, \delta \varphi_i$ , будем пользоваться их средними значениями  $\overline{\delta s} = (1/(n-2)) \sum_{i=1}^{n-2} \delta s_i, \quad \overline{\delta \varphi} = (1/(n-2)) \sum_{i=1}^{n-2} \delta \varphi_i$ ; будем также считать ошибки  $\Delta \varphi_i$  примерно равными. Тогда получим

$$\hat{a} = \left[ j\varphi_H \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left[ \left(s_1 + (i-1)\overline{\delta s}\right)^{1-w} \left(s_1 + (i-1)\overline{\delta s}\right)^{1-w} \right]}{\sum_{i=1}^{n-1} \left[ \left(\varphi_1 + (i-1)\overline{\delta \varphi}\right) \left(s_1 + (i-1)\overline{\delta s}\right)^{1-w} \right]} \right]^{\frac{1}{1-w}}.$$



Освобождаясь от суммирования, запишем уравнение

$$\left[ \frac{j\varphi_H \sum_{i=1}^{n-1} \left[ (s_1 + (i-1)\overline{\delta s})^{1-w} (s_1 + (i-1)\overline{\delta s})^{1-w} \right]}{\sum_{i=1}^{n-1} \left[ (\varphi_1 + (i-1)\overline{\delta\varphi}) (s_1 + (i-1)\overline{\delta s})^{1-w} \right]} \right]^{\frac{1}{1-w}} =$$

$$= \left[ \frac{j\varphi_H (n-1) (s_1 + f\overline{\delta s})^{1-w} (s_1 + f\overline{\delta s})^{1-w}}{(n-1) (\varphi_1 + f\overline{\delta\varphi}) (s_1 + f\overline{\delta s})^{1-w}} \right]^{\frac{1}{1-w}}$$

или, сокращая,

$$\left[ \frac{j\varphi_H \sum_{i=1}^{n-1} \left[ (s_1 + (i-1)\overline{\delta s})^{1-w} (s_1 + (i-1)\overline{\delta s})^{1-w} \right]}{\sum_{i=1}^{n-1} \left[ (\varphi_1 + (i-1)\overline{\delta\varphi}) (s_1 + (i-1)\overline{\delta s})^{1-w} \right]} \right]^{\frac{1}{1-w}} =$$

$$= (s_1 + f\overline{\delta s}) \left[ \frac{j\varphi_H}{(\varphi_1 + f\overline{\delta\varphi})} \right]^{\frac{1}{1-w}},$$

из которого можно найти вещественный множитель  $f$ . Очевидно, что  $0 < f < (n-2)$ ; в качестве начального значения можно принять  $f = n/2$ . Получаем оценку  $\hat{a}$  параметра  $a$ :

$$\hat{a} = (s_1 + f\overline{\delta s}) \left[ \frac{j\varphi_H}{\varphi_1 + f\overline{\delta\varphi}} \right]^{\frac{1}{1-w}}.$$

Теперь найдем оценку дисперсии параметра  $a$

$$\Delta^2 a \approx \left( \frac{\partial \hat{a}}{\partial \overline{\delta s}} \right)^2 \Delta^2 \overline{\delta s} + \left( \frac{\partial \hat{a}}{\partial \overline{\delta\varphi}} \right)^2 \Delta^2 \overline{\delta\varphi} =$$

$$= \left[ f \left( \frac{j\varphi_H}{\varphi_1 + f\overline{\delta\varphi}} \right)^{\frac{1}{1-w}} \right]^2 \left[ \Delta^2 \overline{\delta s} + \left( \frac{1}{1-w} \frac{s_1 + f\overline{\delta s}}{\varphi_1 + f\overline{\delta\varphi}} \right)^2 \Delta^2 \overline{\delta\varphi} \right] =$$

$$= \left[ f (s_1 + f\overline{\delta s}) \left( \frac{j\varphi_H}{\varphi_1 + f\overline{\delta\varphi}} \right)^{\frac{1}{1-w}} \right]^2 \left[ \left( \frac{\Delta \overline{\delta s}}{s_1 + f\overline{\delta s}} \right)^2 + \left( \frac{1}{1-w} \frac{\Delta \overline{\delta\varphi}}{\varphi_1 + f\overline{\delta\varphi}} \right)^2 \right],$$

то есть

$$\Delta^2 a \approx (\hat{a}f)^2 \left[ \left( \frac{\Delta \overline{\delta s}}{s_1 + f\overline{\delta s}} \right)^2 + \left( \frac{1}{1-w} \frac{\Delta \overline{\delta\varphi}}{\varphi_1 + f\overline{\delta\varphi}} \right)^2 \right],$$

$$\text{где } \Delta^2 \overline{\delta s} = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} (\Delta \delta s_i)^2}{(n-2)^2}, \quad \Delta^2 \overline{\delta \varphi} = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} (\Delta \delta \varphi_i)^2}{(n-2)^2}.$$

### Приложение Ж (замечания)

*Замечание 1.* Любая точка  $(s, \varphi)$  на плоскости  $s\varphi$  определяет одну и только одну адроиду. В случае (11)  $\left(\frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^{2w} \ll 1\right)$  для такой точки

$$a = \left[ \frac{j\varphi_H}{\varphi} \right]^{\frac{1}{1-w}} s, \quad (27)$$

в более общем случае (9)  $\left(\frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^{2w} < 1\right)$  для нахождения параметра  $a$  при заданных  $s$  и  $\varphi$  (исключая точку  $s_1 = 0, \varphi_1 = 0$ ) необходимо решить (9) как уравнение относительно  $a$ .

*Замечание 2.* Если взять упрощенное представление (12) адройды, функционал (20) с использованием подстановки (27) представляется в виде, не зависящем ни от параметра  $a$ , ни даже от угла  $\varphi_H$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\Delta \varphi_i} \left[ \sum_{k=1}^{i-1} \delta \varphi_k + \varphi \left( 1 - \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{i-1} \delta s_k \right)^{1-w} \right) \right] \right\}^2,$$

если, конечно, известна ненулевая точка  $(s, \varphi)$ , принадлежащая адроиде.

*Замечание 3.* Масса  $m$  и коэффициент  $\varkappa$  связаны нелинейно. Покажем это. Из (18) имеем  $a \sim [\varphi_H]^{1-w}$ . Но так как  $\varphi_H = \frac{|\overline{H}_z|}{H_0} c_0$ , а  $H_0 = \frac{d\sqrt{2}}{0,3\varkappa}$ , то  $a \sim [\varkappa]^{1-w}$  и, с учетом (14), получаем  $m \sim \varkappa^{\frac{w}{1-w}}$ . Отсюда следует формула для коррекции  $\varkappa$  по табличному значению массы:

$$\varkappa_{\text{табл}} = \varkappa_{\text{предв}} \left( \frac{m_{\text{табл}}}{m_{\text{предв}}} \right)^{\frac{1-w}{w}}.$$

### Приложение 3. Некоторые распределения

Распределение относительной ошибки массы дается на рис.18, где красным показана прямая отсечки, соответствующая уровню 0,25. Возрастание ошибки  $\delta m$  для тяжелых частиц может быть объяснено тем, что для соответствующих треков заметно уменьшается средняя стрела прогиба  $\bar{h}$  (см. п. 4 настоящей работы), а также уменьшается максимально измеренный угол  $\varphi$ .

Плот, указывающий на близость ломаных ( $s, \varphi$ ) к прямой или адрониде, с нанесенной на него красным цветом прямой  $\chi_\varphi^2 = \chi_L^2$  показывается на рис. 19.

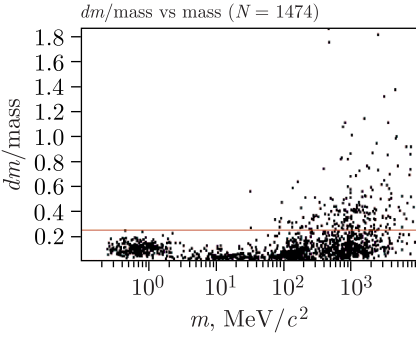


Рис. 18. Плот  $\delta m$  vs  $\lg(m)$

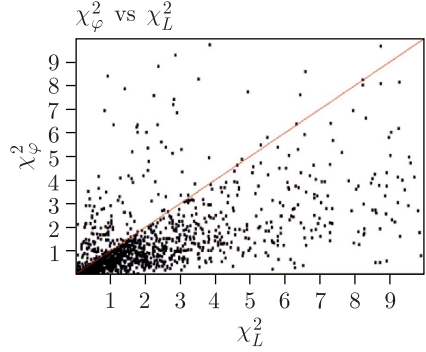


Рис. 19. Плот  $\chi_\varphi^2$  vs  $\chi_L^2$

( $N = 1474/831$ ;  $0.50 < k < 1.50$ ;  $dm/m < 0.25$ ; stopPnt; Xi2Phi/Xi2Line < 1.00)

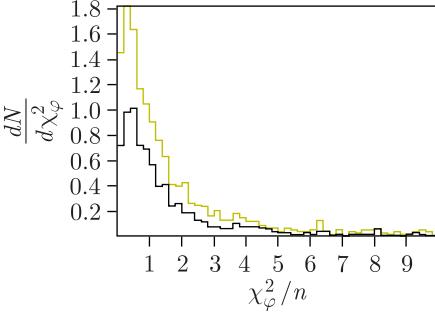


Рис. 20. Распределение  $\chi_\varphi^2/n$

( $N = 1474/831$ ;  $0.50 < k < 1.50$ ;  $dm/m < 0.25$ ; stopPnt; Xi2Phi/Xi2Line < 1.00)

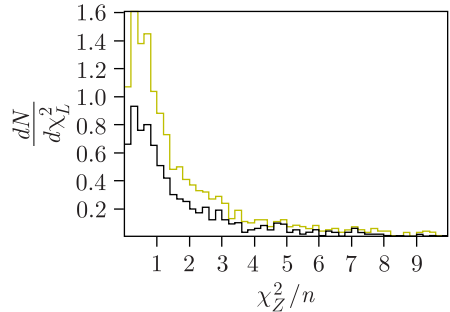


Рис. 21. Распределение  $\chi_Z^2/n$

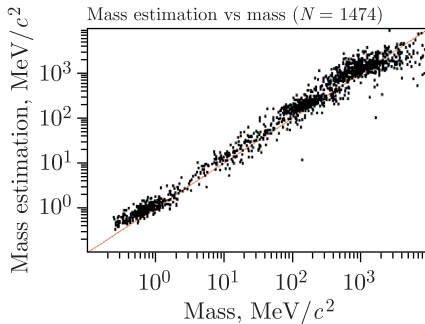


Рис. 22. Плот  $\hat{m}$  vs  $m$ . Показывается результат как  $Z$ -, так и  $N$ -решений

Для справки приводим также распределения величин  $\chi_{\varphi}^2/n$  (рис. 20) и  $\chi_Z^2/n$  (рис. 21), где  $n$  — использованное число измеренных точек на треке. На гистограммах — данные как для всех 1470 треков (желтым), так и для отобранных 721 трека (черным).

Распределения на рис. 20, 21 свидетельствуют в пользу отсутствия значительных систематических погрешностей в вычислительных процедурах.

Наконец, на рис. 22 показываем корреляцию между вычисленной по описанной процедуре массой  $m$  и ее оценкой  $\hat{m}$  как следствие формулы (18). Прямая  $\hat{m} = m$  проведена красным. Как видно, оценка массы  $\hat{m}$  вполне может использоваться как начальное приближение в каких-либо минимизационных процедурах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов А., Киш Д. Введение в экспериментальную физику частиц. М.: Физматлит, 2001.
2. Аникина М. Х., Никитин В. А., Рихвицкий В. С. Поиск новой заряженной частицы в интервале массы 2–100 МэВ. ОИЯИ Р1-2022-62. Дубна, 2022.
3. Belonogov A. V. et al. A Liquid Hydrogen Bubble Chamber of Volume  $950 \times 350 \times 300$  mm // Nucl. Instr. Meth. 1963. V. 20. P. 114–115.
4. Balandin M. P. et al. // Nucl. Instr. Meth. 1963. V. 20. P. 110.
5. Fundamental Formulas of Physics / Ed. Donald H. Mensel. New York: Prentice-Hall, Inc., 1955; Основные формулы физики / Под ред. Д. Мензела. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
6. Емельяненко Г. А., Ломов К. П., Макаренко Г. И., Мороз В. И., Саитов И. С., Стельмах А. П. Определение методом максимума правдоподобия параметров заряженной частицы, движущейся в тормозящей рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле. ОИЯИ, Р-2829. Дубна, 1966.
7. Абдурахимов А. У., Нгуен Дин Ты, Пенев В. Н. Сообщ. ОИЯИ 1-5140. Дубна, 1970.
8. Маркова Н. Ф., Мороз В. И., Никитина В. И., Стельмах А. П., Тентюкова Г. Н. Программа геометрической реконструкции для больших пузырьковых камер (Вариант «1–6»). ОИЯИ, Р10-3768. Дубна, 1968.
9. Балдин А. А., Беляев А. В., Белобородов А. В., Рихвицкий В. С., Троян А. Ю. Восстановление программно-аппаратного комплекса обработки फिल्मовой информации (ОФИ) для пузырьковых камер. Сообщ. ОИЯИ Р10-2023-18. Дубна, 2023.
10. Гаспарян А. П., Зиновьев Л. П., Иерусалимов А. П., Которобай Ф., Кочуров А. Г., Мороз В. И., Нагдасаев С. С., Никитин В. В., Смирнов Ю. В., Троян Ю. А. Нейтронный (стриппинговый) канал Лаборатории высоких энергий ОИЯИ. ОИЯИ 1-9111. Дубна, 1975.

Получено 11 мая 2023 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 13.06.2023.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,58. Тираж 115 экз. Заказ № 60677.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)